Selbstähnlichkeit von Lorenzkurven

Thomas Kämpke
Forschungsinstitut für anwendungsorientierte Wissensverarbeitung/n FAW/n
Lise-Meitner-Str. 9, 89081 Ulm, Germany
kaempke@faw-neu-ulm.de

Ansatz

Der Schlüssel zur Selbstähnlichkeit bei Lorenzkurven besteht darin, aus der Grundidee der Selbstähnlichkeit brauchbare Trankierungen – "Teile" – zu identifitieren und deren Gleichheit bzw. Skalierbarkeit zu einer Lorenzkurve – dem "Ganzem" – zu fordern. Entgegen dem bei Slbsthnlichkeit blichen wird bei Lorenzkurven nicht die Skalierbarkeit aller Teile auf das Ganze gefordert, sondern nur die von bestimmten. Dies stellt eine gewisse Abschwächung gegenüber der Grundidee der Selbstähnlichkeit darstellt.

Da man es mit nur einer einzigen Funktion, der Lorenzkurve, zu tun hat, ist die Ausgangssituation wesentlich einfacher als bei dem typischen Gegenstand der nichtlinearen Dynamik, nämlich einem iterierten Funktionensystem oder einem System von DGLn. Somit ist eine Vereinfachung des Selbstähnlichkeitskonzepts angemessen.

Um Teile mit dem Ganzen vergleichen zu knnen, wird als "Teil" die Trankierung einer Lorenzkurve $F(x)$ definiert durch

$$F^{\delta}(x) = \frac{F(\delta + x \cdot (1-\delta)) - F(\delta)}{1 - F(\delta)}.$$

Aufgrund der Normierungen bei Argumenten und Werten ist die Trankierung einer Lorenzkurve wieder eine Lorenzkurve. Man kann also eine Lorenzkurve und ihre Trankierungen auf gemeinsame Eigenschaften z.B. Differenzierbarkeit und sogar Gleichheit untersuchen. Aus den u.a. Selbstähnlichkeitsbedingungen folgt jeweils die Differenzierbarkeit.

Reine Selbstähnlichkeit

Eine Lorenzkurve heisst **selbstähnlich (nach oben)**, wenn sie mit allen ihren Trankierungen übereinstimmt, also wenn

$$F(x) = F^{\delta}(x)$$

für alle $\delta \in [0,1)$ und alle $x \in [0,1]$. Die Geometrie der Selbstähnlichkeitsbedingung ist in Abb. 1 angegeben.

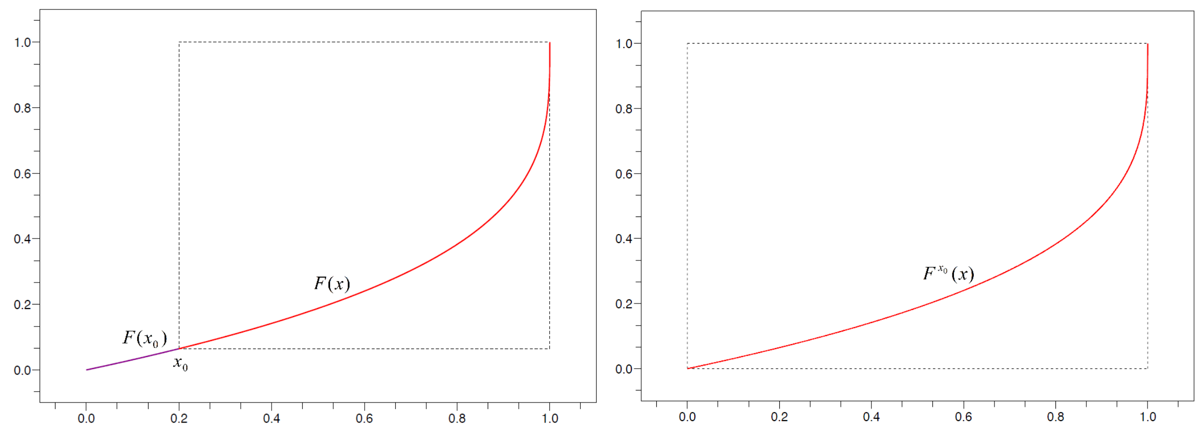

Abbildung 1: Lorenzkurve mit Trankierungspunkt $x_0 = \delta$ (links) und trankierte Lorenzkurve (rechts). Das Rechteck $[x_0, 1] \times [F(x_0), 1]$ (links) wird zum Quadrat $[0,1]^2$ (rechts) gestreckt.

Analog zur Selbstähnlichkeit nach oben kann Selbstähnlichkeit nach unten gefordert werden, was hier aber nicht geschieht; Selbstähnlichkeit wird hier immer "nach oben" verstanden. Die Frage, ob es überhaupt selbstähnliche Lorenzkurven gibt, wird folgendermassen beantwortet.

Satz. Aus der Selbstähnlichkeit einer Lorenzkurve folgt (ohne weitere Voraussetzungen) $F(x) = 1 - (1-x)^{F'_+(0)}$.

Herleitung. Jede monotone, reellwertige Funktion ist fast überall differenzierbar (Satz von Lebesgue). Ausgehend von einem Punkt, in dem Differenzierbarkeit vorliegt, wird die rechtsseitige Differenzierbarkeit in 0 gefolgert. Davon ausgehend wird die beidseitige Differenzierbarkeit in *jedem* Punkt $x \in (0,1)$ gefolgert. Dazu wird die Unterscheidung in die beiden Fälle rechts- und linksseitiger Differenzierbarkeit in $x > 0$ durchgeführt. Eine solche Fälleunterscheidung scheint unvermeidbar, da auch monotone, konvexe Funktionen, die links- und(!) rechtsseitig differenzierbar sind, generell nicht beidseitig differenzierbar sind; vgl. stückweise lineare Funktionen.

Entlang der Argumentation ergibt sich die lineare inhomogene DGL

$$F'(x) = F'_+(0) \cdot \frac{1 - F(x)}{1 - x}.$$

Hieraus ergibt sich nach bekannten Lsungsformeln fr lineare DGLn der gesuchte Funktionstyp. Es bleibt also, Differenzierbarkeit nachzuweisen und die DGL herzuleiten.

Fall 1. Rechtsseitige Differenzierbarkeit. Für $\Delta x > 0$ wird gesetzt $\delta = \frac{\Delta x}{1-x}$, so dass auch $\delta > 0$ und $\Delta x = \delta\,(1-x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{F(x+\delta\,(1-x)) - F(x)}{1 - F(x)} \cdot \frac{1-F(x)}{\delta\,(1-x)} \\
&= F^x(\delta) \cdot \frac{1-F(x)}{\delta\,(1-x)} \\
&= F(\delta) \cdot \frac{1-F(x)}{\delta\,(1-x)} \\
&= \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta - 0} \cdot \frac{1-F(x)}{1-x}.
\end{aligned}$$

Aus der rechtsseitigen Differenzierbarkeit in einem geeigneten $x > 0$, d.h. aus der Existenz des Grenzwerts $\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ folgt die Existenz des Grenzwerts $\lim_{\delta \to 0+} \frac{F(\delta)-F(0)}{\delta - 0}$, also die rechtsseitige

Differenzierbarkeit in 0. Dann folgt aus der rechtsseitigen Differenzierbarkeit in 0 die rechtsseitige Differenzierbarkeit in *jedem* $x > 0$ mit $x < 1$. Man beachte, dass für jedes x die Kopplung zwischen den Inkrementen Δx und δ linear ist, so dass die Grenzprozesse bei Differentialbildung äquivalent sind. Ausserdem wird die Selbstähnlichkeitsbedingung mit vertauschten Rollen von x und δ angewendet. Zusammenfassend ergibt sich die rechtsseitige Differentialgleichung

$$F'_+(x) = F'_+(0) \cdot \frac{1 - F(x)}{1 - x}$$

$\forall\, x \in (0, 1)$.

Fall 2. Linksseitige Differenzierbarkeit in jedem $x > 0$ bei schon hergeleiteter rechtsseitiger Differenzierbarkeit in 0. Für $\Delta x < 0$ wird gesetzt $\delta = \frac{-\Delta x}{1-x-\Delta x}$, so dass $\delta > 0$. Weiterhin gilt $\Delta x = \frac{\delta\,(1-x)}{\delta-1}$, was aber erst in der letzten Gleichheit benutzt wird.

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= -\frac{F(x) - F(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= -\frac{F(x+\Delta x-\Delta x) - F(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= -\frac{F(x+\Delta x+\delta\,(1-(x+\Delta x)) - F(x+\Delta x)}{1 - F(x+\Delta x)} \cdot \frac{1 - F(x+\Delta x)}{-\delta\,(1-(x+\Delta x))} \\
&= -F^{x+\Delta x}(\delta) \cdot \frac{1 - F(x+\Delta x)}{-\delta\,(1-(x+\Delta x))} \\
&= -F(\delta) \cdot \frac{1 - F(x+\Delta x)}{-\delta\,(1-(x+\Delta x))} \\
&= \frac{F(\delta)}{\delta} \cdot \frac{1 - F(x+\Delta x)}{1-(x+\Delta x)} \\
&= \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta - 0} \cdot \frac{1 - F(x+\Delta x)}{1-(x+\Delta x)} \\
&= \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta - 0} \cdot \frac{1 - F(x+\frac{\delta\,(1-x)}{\delta-1})}{1-(x+\frac{\delta\,(1-x)}{\delta-1})}
\end{aligned}$$

Die Selbstähnlichkeitsbedingung wird wieder mit vertauschten Rollen von x und δ angewendet, diesmal sogar abängig vom Inkrement Δx. Die Inkremente Δx und δ stehen nicht mehr in einem linearen Zusammenhang, aber für $\delta \to 0+$ ergibt sich $\Delta x \to 0-$. Wegen der Stetigkeit von F ergibt sich so insgesamt

$$F'_-(x) = F'_+(0) \cdot \frac{1 - F(x)}{1 - x}$$

$\forall\, x \in (0, 1)$.

Aus den beiden Fällen zusammen folgt $F'(x) = F'_+(0) \cdot \frac{1-F(x)}{1-x}$, also die gesuchte DGL.

Wäre hergeleitet, dass aus der Selbstähnlichkeit die Differenzierbarkeit überall folgt, könnte man sich bei der Herleitung der DGL auf den ersten, einfacheren Fall beschränken; die Gleichung für rechtsseitige Differentiale würde die für beidseitige dann sofort nach sich ziehen.

Gini-Selbstähnlichkeit

Als Abschwächung wird nun nicht mehr gefordert, dass eine Lorenzkurve punkweise mit ihren Trankierungen übereinstimmt, sondern dass nur noch die Ginikoeffizienten der jeweilgen Lorenzkurven übereinstimmen. Eine Lorenzkurve $F(x)$ heisst **Gini-selbstähnlich (nach oben)**, wenn sie den selben Ginikoeffizienten hat wie alle ihren Trankierungen, also wenn

$$2 \cdot \int_0^1 x - F(x)\, dx = 2 \cdot \int_0^1 x - F^{\delta}(x)\, dx$$

für alle $\delta \in [0,1)$. Aus der punktweisen Selbstähnlichkeit ergibt sich sofort die Gini-Selbstähnlichkeit, aber es gilt auch die Umkehrung.

Satz. Aus der Gini-Selbstähnlichkeit einer Lorenzkurve folgt (ohne weitere Voraussetzungen) $F(x) = 1-(1-x)^{\varepsilon}$ mit einem Parameter $\varepsilon \in (0,1]$.

Herleitung. Aus der Gini-Selbstähnlichkeit ergibt sich, dass

$$const = \int_0^1 F(x)\, dx = \int_0^1 F^{\delta}(x)\, dx = \int_0^1 \frac{F(\delta + x\cdot(1-\delta)) - F(\delta)}{1-F(\delta)}\, dx$$

tatsächlich eine Konstante ist. Da es sich bei $F(x)$ um eine Lorenzkurve handelt, ist $const \in (0, 0.5]$. Die Gleichung für die Konstante wird umgeschrieben, wobei in der zweiten Gleichung die Substitution $u(x) = \delta + x\cdot(1-\delta)$ mit $du/dx = 1-\delta$ vorgenommen wird.

$$\begin{aligned}
(1-F(\delta))\cdot const + F(\delta) &= \int_0^1 F(\delta + x\cdot(1-\delta))\, dx \\
&= \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{F(u)}{1-\delta}\, du \\
&= \frac{1}{1-\delta}\cdot \int_\delta^1 F(u)\, du \\
\Longrightarrow F(\delta)\cdot(1-const) + const &= \frac{1}{1-\delta}\cdot \int_\delta^1 F(u)\, du \\
\Longrightarrow F(\delta) &= \frac{1}{(1-\delta)(1-const)}\cdot \int_\delta^1 F(u)\, du - \frac{const}{1-const}.
\end{aligned}$$

Da $F(x)$ als Lorenzkurve stetig ist, ist $\int_\delta^1 F(u)\, du$ nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung bzgl. δ differenzierbar mit Ableitung $-F(\delta)$. Nach der Quotientenregel ist daher auch $F(\delta)$ differenzierbar für alle $\delta \in [0,1)$. Die Ableitung kann berechnet werden, wobei die dritte folgende Gleichheit aus der dritten obigen Gleichheit folgt.

$$\begin{aligned}
F'(\delta) &= \frac{-F(\delta)\,(1-\delta) + \int_\delta^1 F(u)\, du}{(1-\delta)^2}\cdot\frac{1}{1-const} \\
&= \frac{-F(\delta) + \frac{\int_\delta^1 F(u)\, du}{1-\delta}}{1-\delta}\cdot\frac{1}{1-const} \\
&= \frac{-F(\delta) + \int_0^1 F(\delta + x\cdot(1-\delta))\, dx}{1-\delta}\cdot\frac{1}{1-const}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1-F(\delta)) \cdot \frac{\int_0^1 F(\delta+x\cdot(1-\delta))-F(\delta)\,dx}{1-F(\delta)}}{1-\delta} \cdot \frac{1}{1-const} \\
&= \frac{1-F(\delta)}{1-\delta} \cdot \int_0^1 F^{\delta}(x)\,dx \cdot \frac{1}{1-const} \\
&= \frac{1-F(\delta)}{1-\delta} \cdot \int_0^1 F(x)\,dx \cdot \frac{1}{1-const} \\
&= \frac{const}{1-const} \cdot \frac{1-F(\delta)}{1-\delta}.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich so für die Lorenzkurve insgesamt die lineare inhomogene DGL

$$F'(\delta) = \frac{const}{1-const} \cdot \frac{1-F(\delta)}{1-\delta}$$

mit $0 < const/(1-const) \leq 1$ wegen $0 < const \leq 0.5$. Die allgemeine Lösung der DGL ist $F(x) = 1-(1-x)^{const/(1-const)}$, also die Paretoverteilung mit $\varepsilon = \frac{const}{1-const}$.