

Materialsammlung:

Analytische Eigenschaften von Equity-Lorenzkurven

T. Kämpke ¹ / F. J. Radermacher ²

¹ PD Dr. Thomas Kämpke, Forschungsinstitut für anwendungsorientierte Wissensverarbeitung/n (FAW/n), kaempke@faw-neu-ulm.de

² Prof. Dr. Dr. Franz Josef Radermacher, Vorstand des Forschungsinstituts für anwendungsorientierte Wissensverarbeitung/n (FAW/n), zugleich Professor für Informatik, Universität Ulm, Präsident des Global Economic Network, Wien, Vizepräsident des Ökosozialen Forum Europa, Wien sowie Mitglied des Club of Rome

Korrespondenzadresse: FAW/n, Lise-Meitner-Str. 9, D-89081 Ulm, Tel. 0731-50 39 100, Fax 0731-50 39 111, E-Mail: radermacher@faw-neu-ulm.de, <http://www.faw-neu-ulm.de>

Einleitung

Das vorliegende Dokument entwickelt und beweist „Analytische Eigenschaften von Equity-Lorenzkurven“. Diese Resultate wurden von den Autoren überwiegend im Zusammenhang mit der Dissertation [1] an der RWTH Aachen erzielt. In der Dissertation steht die Präsentation der Theorie der Equity-Lorenzkurven und ökonomische Ableitungen aus mathematischen Ergebnissen im Vordergrund. Die dazu korrespondierende mathematische Basis wurde am FAW/n entwickelt und befindet sich in Teilen in dieser Materialsammlung. Dies betrifft insbesondere Fragestellungen, die in [1] in Kapitel 8 behandelt werden. Sofern Aussagen in [1] genutzt werden, wird das hier als Fußnote festgehalten. Die hier formalisierten Aussagen sind teilweise allgemeiner als die Formulierungen in [1]. Es gibt ferner ergänzende Aussagen, die in [1] nicht vorkommen. Aus Vereinfachungsgründen bzw. systematischen Überlegungen wechseln manchmal auch die Bezeichnungen.

Gegenstand der weiteren Betrachtungen sind sogenannte Equity-Lorenzdichten der Form $f_\varepsilon(x) = \varepsilon(1-x)^{\varepsilon-1}$. Hierbei gilt $0 < \varepsilon \leq 1$ und $0 \leq x < 1$. Sie korrespondieren zu sogenannten Equity-Lorenzkurven der Form $F_\varepsilon(x) = 1 - (1-x)^\varepsilon$. Generell gilt $f_\varepsilon(0) = \varepsilon$. Der Wert ε beschreibt jeweils das niedrigste (relative) Einkommen. Sieht man von der Gleichverteilung $f_1(x) = 1$ für alle $0 \leq x < 1$ ab, gilt $\lim_{x \rightarrow 1} f_\varepsilon(x) = \infty$ für alle $0 < \varepsilon < 1$. Alle derartigen Equity-Lorenzdichten sind stetig, differenzierbar und streng monoton wachsend.

Die folgende Abbildung zeigt die Equity-Lorenzdichten zu den Parametern $\varepsilon = 0,3$, $\varepsilon = 0,6$ und $\varepsilon = 0,9$.

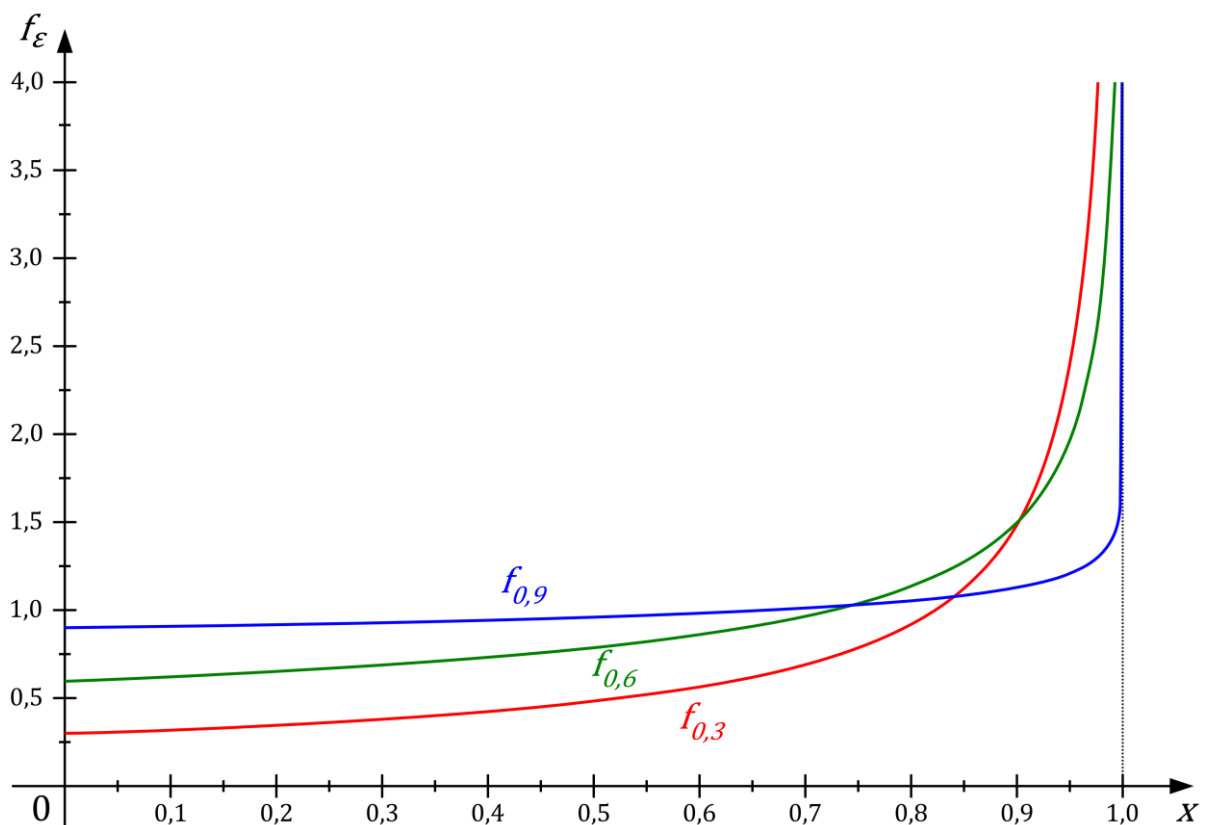


Abb. 1: Verschiedene Equity-Lorenzdichten

Satz 1 (Verhalten der unteren Gewinnergrenze ³⁾ ⁴

Es interessiert die Gültigkeit von $f_\varepsilon(x) = f_{\varepsilon'}(x)$ für $\varepsilon \neq \varepsilon'$ und $0 < x < 1$. Es gilt:

(1) Es existiert jeweils genau ein solcher Schnittpunkt. Dieser wird mit $T(\varepsilon, \varepsilon')$ bezeichnet. Es gilt $0 < T(\varepsilon, \varepsilon') < 1$.

(2) Es gilt $T(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{-\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}}$

(3) $T(\varepsilon, \varepsilon')$ ist symmetrisch in ε und ε' , d.h. $T(\varepsilon, \varepsilon') = T(\varepsilon', \varepsilon)$ für alle $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$ mit $\varepsilon \neq \varepsilon'$

(4) $T(\varepsilon, \varepsilon')$ ist monoton fallend in ε und ε'

(5) $\lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon^-} T(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

(6) $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} T(\varepsilon, \varepsilon') = 1$

Beweis:

(1), (2) Es gilt

$$\begin{aligned}
 f_\varepsilon(x) = f_{\varepsilon'}(x) &\Leftrightarrow \varepsilon(1-x)^{\varepsilon-1} = \varepsilon'(1-x)^{\varepsilon'-1} \\
 &\Leftrightarrow (1-x)^{\varepsilon-\varepsilon'} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \\
 &\Leftrightarrow \ln(1-x) = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'} \\
 &\Leftrightarrow 1-x = e^{\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}} \\
 &\Leftrightarrow x_s = 1 - e^{-\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}}
 \end{aligned}$$

³ Für $\varepsilon > \varepsilon'$ verlieren alle Einkommenspositionen $0 \leq x < T(\varepsilon, \varepsilon')$ relativ an Einkommen, wenn ε auf ε' abgesenkt wird. Entsprechend gewinnen in diesem Fall alle Einkommenspositionen $T(\varepsilon, \varepsilon') < x < 1$. Aus diesem Grund wird $T(\varepsilon, \varepsilon')$ für $\varepsilon > \varepsilon'$ als untere Gewinnergrenze bezeichnet.

⁴ Satz 1 ist eine Erweiterung von Satz 8.3 auf S. 234 in [1]. Von den Bezeichnungen her wird ε_1 durch ε und ε_2 durch ε' ersetzt.

Man prüft $0 < T(\varepsilon, \varepsilon') < 1$ direkt nach.

(3) Die Aussage folgt aus $\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'} = \frac{-\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)}{-(\varepsilon' - \varepsilon)} = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)}{\varepsilon' - \varepsilon}$

(4) $T(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{\varepsilon - \varepsilon'}}$ monoton fallend in ε

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{\varepsilon - \varepsilon'}}_{=: \varphi(\varepsilon)} \text{ monoton steigend in } \varepsilon$$

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{(\ln \varepsilon' - \ln \varepsilon)' \cdot (\varepsilon - \varepsilon') - \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \cdot 1}{(\varepsilon - \varepsilon')^2} = \frac{-\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon} - \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{(\varepsilon - \varepsilon')^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon} \geq \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \geq \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

Diese Ungleichung gilt, da bekanntermaßen $x - 1 \geq \ln x$ für alle $x > 0$ gilt, wobei hier $x = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ gewählt wird. (Man beachte: die Bedingung $\varepsilon > \varepsilon'$ wird nicht benötigt.)

Die fallende Monotonie von $T(\varepsilon, \varepsilon')$ in ε' ergibt sich aus der fallenden Monotonie in ε und der Identität $T(\varepsilon, \varepsilon') = T(\varepsilon', \varepsilon) \quad \forall 0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1, \varepsilon \neq \varepsilon'$.

(5) $\lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon^-} T(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, denn

$$\boxed{0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1}$$

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon^-} \frac{\ln \varepsilon' - \ln \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon'} \stackrel{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]}{=} \lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon^-} \frac{\frac{1}{\varepsilon'}}{\varepsilon' - 1} = -\frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{Anwendung der Regel von L'Hospital})$$

(6) Nach der Monotonieaussage (4) gilt $T(\varepsilon, \varepsilon') \geq T(\varepsilon, \varepsilon'')$ für alle $\varepsilon > \varepsilon'' > \varepsilon'$. Mit der Konvergenzaussage (5) ergibt sich $T(\varepsilon, \varepsilon') \geq \lim_{\varepsilon'' \rightarrow \varepsilon} T(\varepsilon, \varepsilon'') = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, d.h.

$$1 \geq \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} T(\varepsilon, \varepsilon') \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 1 - e^{-\infty} = 1, \text{ also } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} T(\varepsilon, \varepsilon') = 1.$$

Die Verhältnisse in Satz 1 werden komplizierter, wenn Wachstumsfragen einbezogen werden. Der folgende Fall betrachtet für $\varepsilon > \varepsilon'$ und einen Wachstumsfaktor $\alpha > 1$ die Kurven $f_\varepsilon(x)$ und $f_{\varepsilon'}(x)$.

Satz 2

Für $\varepsilon > \varepsilon'$ und $\alpha > 0$ gilt für den Schnittpunkt $x(\varepsilon, \varepsilon', \alpha)$ der Kurven $f_\varepsilon(x)$ und

$$\alpha f_{\varepsilon'}(x): \quad x(\varepsilon, \varepsilon', \alpha) = 1 - e^{\frac{\ln \frac{\alpha \varepsilon'}{\varepsilon}}{\varepsilon - \varepsilon'}}$$

Herleitung:

$$f_\varepsilon(x) = \alpha f_{\varepsilon'}(x) \Leftrightarrow \varepsilon(1-x)^{\varepsilon-1} = \alpha \varepsilon'(1-x)^{\varepsilon'-1}$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^{\varepsilon-\varepsilon'} = \frac{\alpha \varepsilon'}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon - \varepsilon') \cdot \ln(1-x) = \ln\left(\frac{\alpha \varepsilon'}{\varepsilon}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = \frac{\ln\left(\frac{\alpha \varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}$$

$$\Leftrightarrow 1-x = e^{\frac{\ln\left(\frac{\alpha \varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - e^{\frac{\ln\left(\frac{\alpha \varepsilon'}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}}$$

Der Dichteschnittpunkt verläuft nicht monoton in ε' , wie folgende Graphik zeigt.

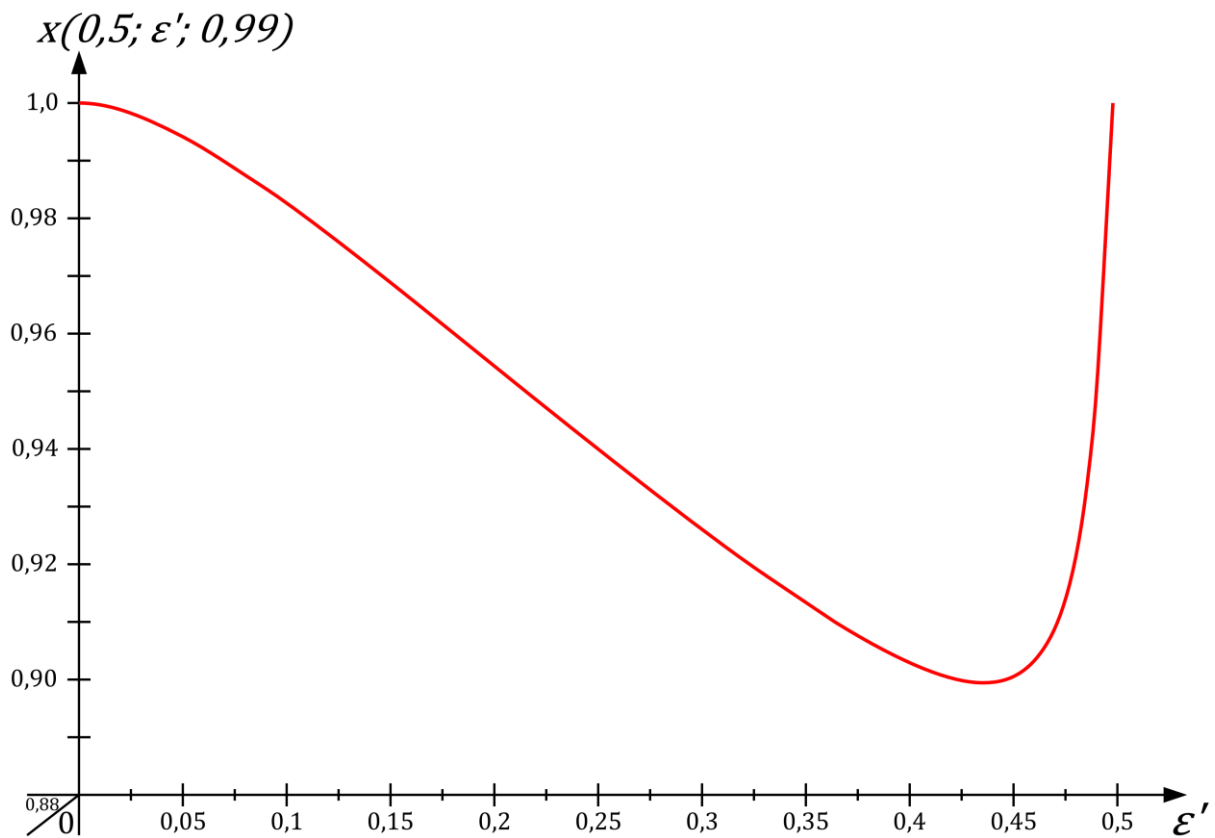


Abb. 2: Dichteschnittpunkt für $\varepsilon = 0,5$ und $\alpha = 0,99$.

Interessant ist in diesem Kontext die Nichtmonotonie für das gewählte α nahe 1, obwohl aufgrund von Satz 1 im Grenzfall Monotonie vorliegen muss. Die folgende Abbildung zeigt, wie sich für Annäherung von α an 1 die Monotonie ergibt.

Der Dichteschnittpunkt verläuft generell nicht monoton in ε' , sofern $\alpha < 1$, wie folgende Graphik für $\alpha = 0,9$, $\alpha = 0,99$, $\alpha = 0,999$ und $\alpha = 0,9999$ zeigt (blaue Kurven). Die Grenzkurve für $\alpha = 1$ ist monoton (rot).

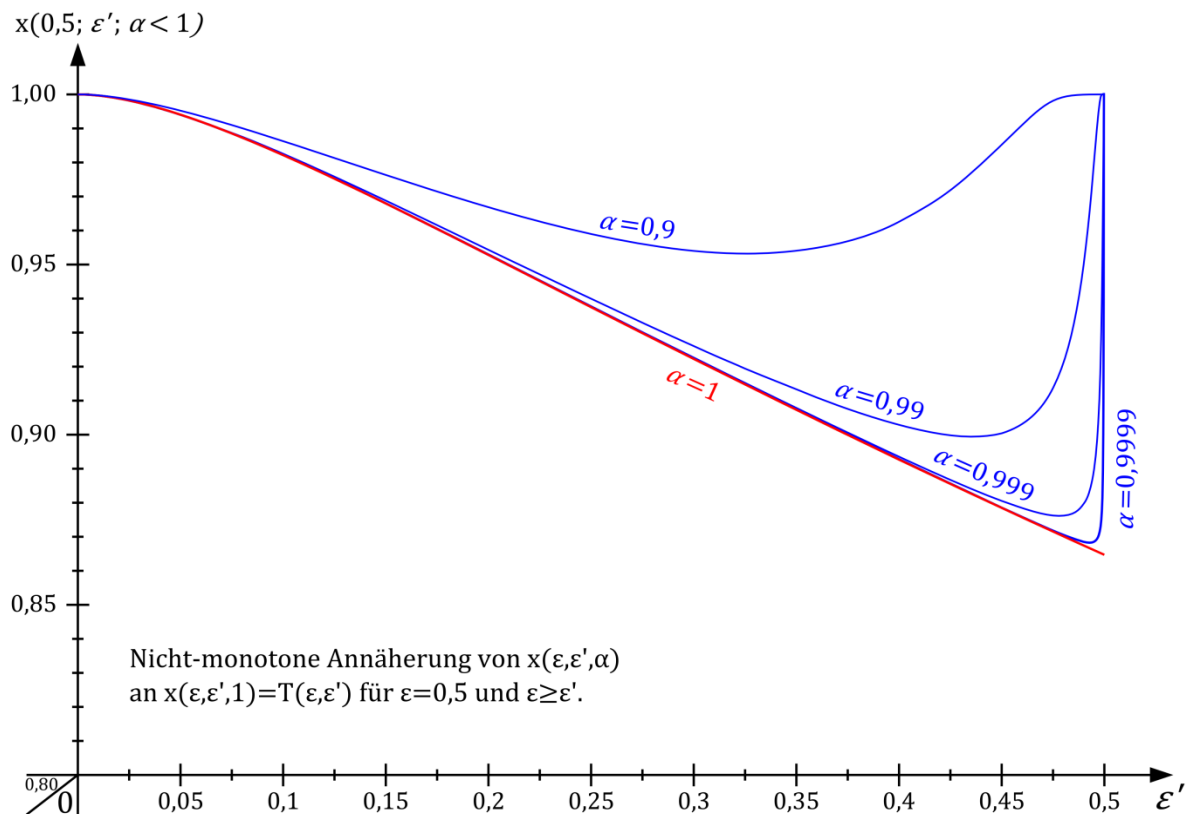


Abb. 3: Dichteschnittpunkte für $\varepsilon = 0,5$.

Satz 3⁵

Im Weiteren werden die Verläufe der Differenzen der betrachteten Equity-Lorenzdichten betrachtet, die als Verlustfunktionen bezeichnet werden, also

$$VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x) = VERL(x) = f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon'}(x).$$

Die Verlustfunktionen bezeichnen also für alle Einkommenspositionen $x \leq T(\varepsilon, \varepsilon')$ den durch eine Absenkung des Ausgleichsniveaus von ε auf ε' erlittenen (relativen) Verlust der Einkommensposition x . Für $VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x)$ gelten folgende Aussagen:

$$(1) \quad VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x) \quad \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow & x < T(\varepsilon, \varepsilon') \\ = 0 & \Leftrightarrow & x = T(\varepsilon, \varepsilon') \\ < 0 & \Leftrightarrow & x > T(\varepsilon, \varepsilon') \end{cases}$$

(2) $VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x)$ ist stetig in ε , ε' und x für $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$ und $x \in [0, 1]$

(3) Der Verlauf der Verlustfunktionen hat drei prinzipiell mögliche Ausprägungen:

⁵ Satz 3 verallgemeinert Satz 8.5 (Hauptsatz 1 über Verlustfunktionen); Seite 244 in [1]. Vgl. auch Fußnote 225 auf S. 241 in [1]. Dabei wird wieder ε_1 durch ε und ε_2 durch ε' ersetzt.

- $VERL$ ist monoton fallend auf $[0, T(\varepsilon, \varepsilon')]$
- $VERL$ hat genau ein Maximum im Inneren des Intervalls $[0, T(\varepsilon, \varepsilon')]$ und keinen Wendepunkt
- $VERL$ hat genau ein Maximum im Inneren des Intervalls $[0, T(\varepsilon, \varepsilon')]$ und links davon genau einen Wendepunkt.

(4) Ein Maximum im Inneren liegt dann vor, wenn $\varepsilon \cdot (1 - \varepsilon) > \varepsilon' \cdot (1 - \varepsilon')$ ist. Es liegt an

der Stelle $x_m = 1 - e^{\frac{\ln(\frac{\varepsilon(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)})}{\varepsilon - \varepsilon'}}$. Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn entweder $\varepsilon \leq 0,5$ oder $\varepsilon > 0,5$ und $\varepsilon' < 1 - \varepsilon$ gilt.

(5) Für die Maximalstelle gilt analog zum Nulldurchgang $x_m(\varepsilon, \varepsilon') = x_m(\varepsilon', \varepsilon)$ für alle $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Ferner ist x_m monoton fallend in beiden Argumenten mit

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon} x_m(\varepsilon, \varepsilon') = \max \left(0, 1 - e^{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}} \right).$$

(6) Es gilt $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} x_m(\varepsilon, \varepsilon') = 1$.

(7) Es gilt $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x_m(\varepsilon, \varepsilon')) = \infty$ für alle $\varepsilon \in (0, 1)$.⁶

(8) Ein Wendepunkt liegt genau dann vor, wenn $\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) > \varepsilon'(\varepsilon' - 1)(\varepsilon' - 2)$

ist. Er liegt an der Stelle $x_W = 1 - e^{\frac{\ln(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)})}{\varepsilon' - \varepsilon}}$. Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn entweder $\varepsilon \leq 0,42265$ gilt oder $\varepsilon > 0,42265$ und $\varepsilon' < \varepsilon^*(\varepsilon)$ gilt (Hinweis: ε^* ist eindeutig bestimmt durch $\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) = \varepsilon^*(\varepsilon^* - 1)(\varepsilon^* - 2)$ und $0 < \varepsilon^* < 0,42265$. Es gilt $\varepsilon^* \leq 1 - \varepsilon$. Die Existenz eines lokalen Maximums der Verlustfunktion ist notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunkts).

(9) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_W = 1$.

⁶ Die Verhältnisse bei doppelter Grenzwertbildung für ε und ε' sind sehr kompliziert und vielleicht überraschend. Es gilt (hier ohne Beweis):

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} \sup VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x_m(\varepsilon, \varepsilon')) = \infty, \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} \inf VERL_{(\varepsilon, \varepsilon')}(x_m(\varepsilon, \varepsilon')) = 0$$

Hinweis:

Der Beweis zum Hauptsatz 1 über Verlustfunktionen beinhaltet die nachfolgende Einsicht über die praktische Bestimmung solcher Paare $\varepsilon, \varepsilon'$, für die ein Maximum der Verlustfunktion im Inneren von $(0,1)$ vorliegt. Besonders wichtig ist die in Satz 3 (4) deutlich werdende Sonderrolle des mittleren Equityniveaus $\varepsilon = 0,5$. Von diesem Niveau abwärts gibt es auch bei marginaler Equity-Absenkung immer ein lokales Maximum der Verlustfunktion. In Bezug auf die Frage nach kostengünstigen Mehrheitskoalitionen zur Durchsetzung weiterer Equity-Absenkungen, wie sie z.B. in Kämpke [2] und in [1] untersucht werden, droht deshalb immer die Möglichkeit der Aufspaltung der dort betrachteten „bürgerlichen Koalition“. Diese Aussage gilt für den allgemeinen Fall, dass beliebige Mehrheitserfordernisse β mit $0 < \beta < 1$ behandelt werden.

Für die angestrebte Aussage betrachtet man den Verlauf des Polynoms $x(1-x)$ für $0 \leq x \leq 1$, das wie folgt aussieht:

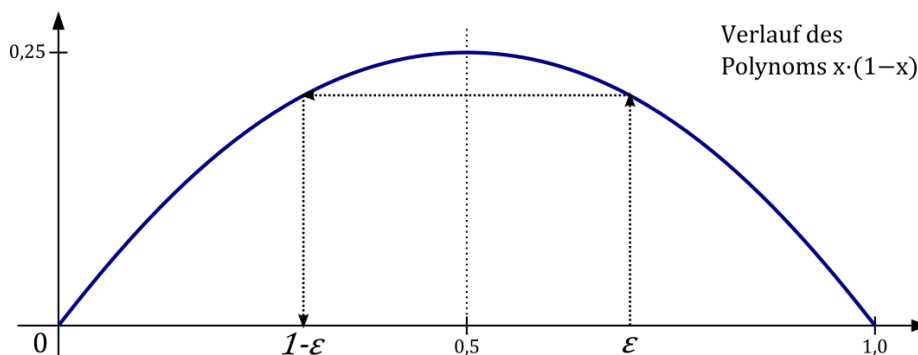


Abb. 4: Bestimmung von Verlustfunktionen mit Maximum im Inneren

Es gelten die folgenden Regeln:

- Für $\varepsilon > \frac{1}{2}$ findet man immer ein ε' , so dass $\varepsilon > \varepsilon' \geq \frac{1}{2}$ gilt. Damit ist $\varepsilon(1-\varepsilon) < \varepsilon'(1-\varepsilon')$. In einer derartigen Konstellation gibt es **kein** Maximum der Verlustfunktion im Inneren von $(0,1)$.
- Für $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > \varepsilon'$ liegt immer ein Maximum der Verlustfunktion im Inneren von $(0,1)$ vor.

- Für $\varepsilon > \frac{1}{2} > \varepsilon'$ ist $\varepsilon' < 1 - \varepsilon$ äquivalent dazu, dass ein Maximum der Verlustfunktion im Inneren von $(0,1)$ vorliegt.

Beweis:

Der Beweis des Hauptsatzes über den Verlauf der Verlustfunktionen erfolgt so, dass zunächst die Ableitung der Funktion $f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon'}(x)$ allgemein studiert wird. Auf diesem Wege werden zunächst die Aussagen (1) und (2) bewiesen. (1) ist offensichtlich. Aussage (2) folgt direkt aus der Definition der Equity-Lorenzdichten als stetige Zusammensetzung stetiger Funktionen.

$$(3), (4) \quad VERL'(x) = \frac{d}{dx}(f_\varepsilon(x) - f_{\varepsilon'}(x)) = -\varepsilon(\varepsilon - 1)(1 - x)^{\varepsilon - 2} + \varepsilon'(\varepsilon' - 1)(1 - x)^{\varepsilon' - 2}$$

Notwendige Bedingung für ein Maximum in $(0,1)$ ist

$$\begin{aligned} & -\varepsilon(\varepsilon-1)(1-x)^{\varepsilon-2} + \varepsilon'(\varepsilon'-1)(1-x)^{\varepsilon'-2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \varepsilon'(\varepsilon'-1)(1-x)^{\varepsilon'-2} = \varepsilon(\varepsilon-1)(1-x)^{\varepsilon-2} \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} = (1-x)^{(\varepsilon-2) - (\varepsilon'-2)} \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} = (1-x)^{\varepsilon-\varepsilon'} \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{\ln \frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)}}{\varepsilon - \varepsilon'} = \ln(1-x) \\ \Leftrightarrow & \quad x_{MAX} = x_m = 1 - e^{\underbrace{\frac{\ln \frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)}}{\varepsilon - \varepsilon'}}_{:= d(\varepsilon, \varepsilon')}} \end{aligned}$$

Es werden nur $x \in (0,1)$ betrachtet.

Wegen $0 < e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x_m < 1$. Zur Sicherung von $x_m > 0$ (d.h. Maximum in Inneren), muss $1 - e^a > 0$ gelten

$$\Leftrightarrow e^a < 1$$

$$\Leftrightarrow a < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \left(\frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} < 1$$

Wir studieren Equityabsenkungen der Form $\varepsilon > \varepsilon'$; $\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}$ ist daher positiv. Es ist

deshalb $\left(\frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} < 1$. Entscheidend ist dafür also das Verhalten

des Bruchs $\frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ für $0 < \varepsilon' < \varepsilon \leq 1$. Wir betrachten dazu den Verlauf des Polynoms

$x(1-x)$ in $[0,1]$

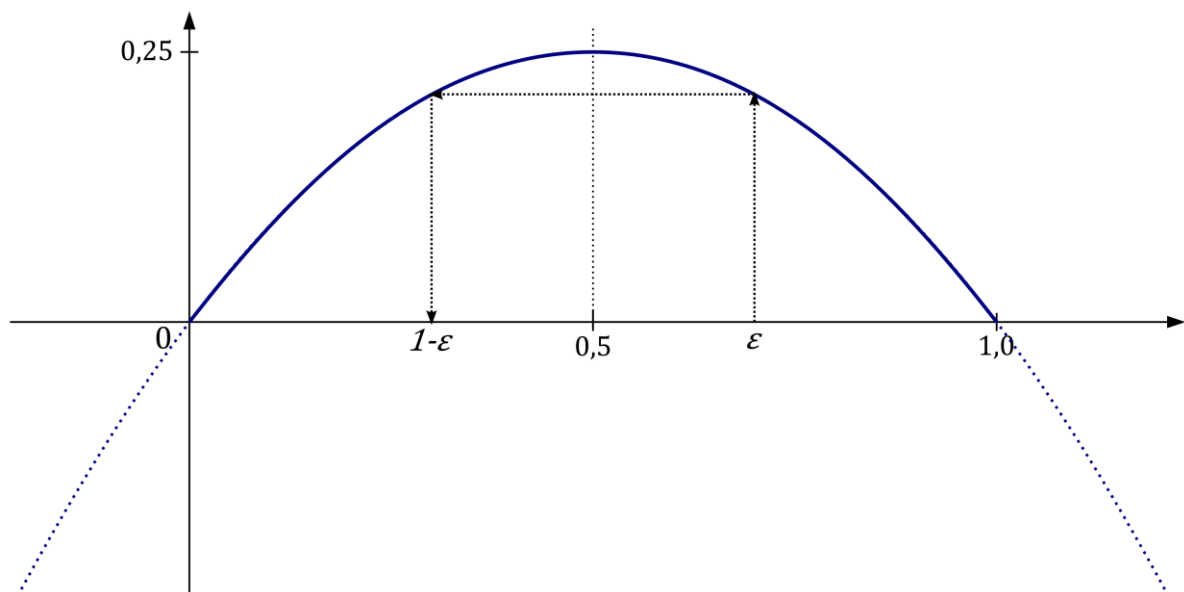


Abb. 5: Polynom $x(1-x)$ in $[0,1]$

Offenbar ist für $\varepsilon > \varepsilon' \geq \frac{1}{2}$ der Bruch $b(\varepsilon, \varepsilon') > 1$, also $b(\varepsilon, \varepsilon')^{\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon'}} > 1$, also $x_m \leq 0$, also das Maximum ein Randmaximum.

Betrachtet man stattdessen die Situation $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > \varepsilon'$, dann ist $\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon'}$ immer noch positiv. Entscheidend ist erneut das Verhalten von $b(\varepsilon, \varepsilon')$. Für $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > \varepsilon'$ gilt nun

$b(\varepsilon, \varepsilon') < 1$, also ist $(b(\varepsilon, \varepsilon'))^{\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon'}} < 1$, also $x_m > 0$, also das Maximum eine Stelle im Inneren von $(0, 1)$, und zwar an der Stelle x_m .⁷

Betrachtet man schließlich die Situation $\varepsilon > \frac{1}{2} > \varepsilon'$, so entscheidet analog die Gültigkeit von $\varepsilon' < 1 - \varepsilon$ darüber, ob $\varepsilon'(1 - \varepsilon') < \varepsilon(1 - \varepsilon)$ und damit $b(\varepsilon, \varepsilon') < 1$ ist. Genau in diesem Fall existiert ein lokales Maximum der Verlustfunktion im Inneren von $(0, 1)$.

Beweis zu (5):

Die Symmetrieaussage ergibt sich durch

$$x_m(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1 - \varepsilon')}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'}} = 1 - e^{\frac{-\ln \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{\varepsilon'(1 - \varepsilon')}}{-(\varepsilon' - \varepsilon)}} = 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{\varepsilon'(1 - \varepsilon')}}{\varepsilon' - \varepsilon}} = x_m(\varepsilon', \varepsilon).$$

Die Monotonieaussage braucht wegen der Symmetrieaussage nur im ersten Argument nachgewiesen zu werden.

$$x_m(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1 - \varepsilon')}{\varepsilon(1 - \varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'}} \text{ ist fallend in } \varepsilon \text{ genau dann, wenn}$$

$$h(\varepsilon) := \frac{\ln \varepsilon' + \ln(1 - \varepsilon') - \ln \varepsilon - \ln(1 - \varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon'} \text{ steigend in } \varepsilon.$$

⁷ **Hinweis:** In dem substantiell verschiedenen Verhalten der Verlustfunktion für einerseits $\varepsilon > \varepsilon' \geq \frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{2} \geq \varepsilon > \varepsilon'$ manifestiert sich die besondere Bedeutung des Equitywertes $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Die Lage zu diesem Wert ist in allgemeiner Betrachtung der Schlüssel für die Koalitionsaufspaltungs- bzw. Bifurkationsthematik bei marginaler Equityabsenkung und beliebiger Mehrheitserfordernisse $0 < \beta < 1$, wie dies oben in dem Hinweis in Anschluss an Satz 3 diskutiert wurde.

$$h'(\varepsilon) = \frac{\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right)(\varepsilon - \varepsilon') - (\ln \varepsilon' + \ln(1-\varepsilon') - \ln \varepsilon - \ln(1-\varepsilon))}{(\varepsilon - \varepsilon')^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon - \varepsilon') \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) \geq \ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon - \varepsilon') \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \geq \ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

Mit $x = \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ ergibt die allg. Ungleichung $\ln x \leq x - 1$:

$$\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} - 1 = (\varepsilon - \varepsilon') \frac{\varepsilon + \varepsilon' - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \leq (\varepsilon - \varepsilon') \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \text{ wobei die letzte Ungleichung}$$

für zwei Fälle nachgewiesen wird.

1. Fall $\varepsilon > \varepsilon'$. Dann ist

$$(\varepsilon - \varepsilon') \frac{\varepsilon + \varepsilon' - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \leq (\varepsilon - \varepsilon') \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon + \varepsilon' - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \leq \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon + \varepsilon' - 1 \leq 2\varepsilon - 1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon' \leq \varepsilon. \text{ (Nach Fallunterscheidung ist diese Ungleichung gültig.)}$$

2. Fall $\varepsilon < \varepsilon'$. Dann ist

$$(\varepsilon - \varepsilon') \frac{\varepsilon + \varepsilon' - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \leq (\varepsilon - \varepsilon') \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon + \varepsilon' - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \geq \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon + \varepsilon' - 1 \geq 2\varepsilon - 1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon' \geq \varepsilon. \text{ (Nach Fallunterscheidung ist diese Ungleichung gültig.)}$$

Die Konvergenzaussage ergibt sich wie folgt:

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon} \frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon} \frac{\ln \varepsilon' + \ln(1-\varepsilon') - \ln \varepsilon - \ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon - \varepsilon'} \stackrel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{=} \lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon} \frac{\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{1-\varepsilon'}}{-1} = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon} x_m(\varepsilon, \varepsilon') = \lim_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon} 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'}} = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Beweis zu (6):

Nach der Monotonieaussage aus (5) gilt

$$x_m(\varepsilon, \varepsilon') \geq x_m(\varepsilon, \varepsilon'') \text{ f\"ur alle } \varepsilon > \varepsilon'' > \varepsilon'$$

Mit der Konvergenzaussage aus (5) folgt hieraus

$$x_m(\varepsilon, \varepsilon') \geq \lim_{\varepsilon'' \rightarrow \varepsilon} x_m(\varepsilon, \varepsilon'') = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}}, \text{ also}$$

$$1 \geq \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} x_m(\varepsilon, \varepsilon') \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}} = 1 - e^{-\infty + 1} = 1.$$

Beweis zu (7):

Der Beweis erfolgt in 4 Schritten.

Schritt 1: Beweis der Aussage $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x_m)}{f_{\varepsilon'}(x_m)} = \frac{1}{1-\varepsilon}$

Schritt 2: Beweis der Aussage $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \varepsilon'(\varepsilon'(1-\varepsilon'))^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = \infty$

Schritt 3: Beweis der Aussage $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} f_{\varepsilon'}(x_m) = \infty$ unter Nutzung von Schritt 2

Schritt 4: Beweis des Satzes, also der Aussage $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} VERL_{\varepsilon, \varepsilon'}(x_m) = \infty$ unter Nutzung von Schritt 1 und 3.

Schritt 1: Zeige $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x_m)}{f_{\varepsilon'}(x_m)} = \frac{1}{1-\varepsilon}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x_m)}{f_{\varepsilon'}(x_m)} &= \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x_m(\varepsilon, \varepsilon'))}{f_{\varepsilon'}(x_m(\varepsilon, \varepsilon'))} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(1-x_m)^{\varepsilon-1}}{\varepsilon'(1-x_m)^{\varepsilon'-1}} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} (1-x_m)^{\varepsilon-\varepsilon'} = \\ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \left(\left(\frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} \right)^{\varepsilon-\varepsilon'} &= \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \cdot \frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \cdot \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'} \cdot (\varepsilon'-1) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} (1-\varepsilon') = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Damit ist Schritt 1 bewiesen.

Schritt 2: Zeige $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \varepsilon'(\varepsilon'(1-\varepsilon'))^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = \infty$

Es gilt:

$$\varepsilon'(\varepsilon'(1-\varepsilon'))^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = \varepsilon'^{1+\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} \cdot \underbrace{(1-\varepsilon')^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}}}_{A(\varepsilon')}$$

$$\text{wegen } \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} A(\varepsilon') \rightarrow 1^{\frac{-1}{\varepsilon}} \rightarrow 1$$

$$\text{reicht der Nachweis von } \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} (\varepsilon')^{1+\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = \infty$$

$$\text{Es ist } (\varepsilon')^{1+\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = (\varepsilon')^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = e^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\varepsilon'} \cdot \ln \varepsilon'}$$

$$\text{Wegen } \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\varepsilon'} \cdot \ln(\varepsilon') = \underbrace{(\varepsilon-1)}_{< 0 \text{ fest}} \cdot \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon')}{\varepsilon-\varepsilon'} \text{ und } \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{\ln(\varepsilon')}{\varepsilon-\varepsilon'} = -\infty \text{ folgt die Behauptung.}$$

tung.

Damit ist Schritt 2 bewiesen.

Schritt 3: Zeige $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} f_{\varepsilon'}(x_m) \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon'}(x_m) &= \varepsilon' (1 - x_m)^{\varepsilon'-1} = \varepsilon' \left(\left(\frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} \right)^{\varepsilon'-1} \\ &= \varepsilon' \left(\frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = \left(\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} \cdot \varepsilon' \cdot (\varepsilon'(1-\varepsilon'))^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} \end{aligned}$$

wegen $\frac{\varepsilon'(\varepsilon'-1)}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon}$ für $\varepsilon' \rightarrow 0$ geht $\left(\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \right)^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}}$ gegen eine Konstante.

Die Aussage folgt dann, wenn $\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \varepsilon' \cdot (\varepsilon'(1-\varepsilon'))^{\frac{\varepsilon'-1}{\varepsilon-\varepsilon'}} = \infty$ gezeigt werden kann. Das ist aber gerade die Aussage von Schritt 2. Damit ist Schritt 3 bewiesen.

Schritt 4: Zeige die Behauptung des Satzes, also

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} VERL_{\varepsilon, \varepsilon'}(x_m) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} (f_{\varepsilon}(x_m) - f_{\varepsilon'}(x_m)) = \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } f_{\varepsilon}(x_m) - f_{\varepsilon'}(x_m) &= \underbrace{f_{\varepsilon'}(x_m)}_{\substack{\rightarrow \infty \\ \text{(wegen Schritt 3)}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{f_{\varepsilon}(x_m)}{f_{\varepsilon'}(x_m)} - 1 \right)}_{\substack{\frac{1}{1-\varepsilon} \quad \text{(wegen Schritt 1)}}} \\ &= \underbrace{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}_{\text{konstant}} \end{aligned}$$

Beweis zu (8):

Wo liegt ein Wendepunkt der Verlustfunktion und wann gibt es einen solchen? Notwendige Bedingung ist

$$VERL''(x) = \frac{d^2}{d^2 x} (f_{\varepsilon}(x) - f_{\varepsilon'}(x)) = \frac{d}{dx} \left[-\varepsilon(\varepsilon-1)(1-x)^{\varepsilon-2} + \varepsilon'(\varepsilon'-1)(1-x)^{\varepsilon'-2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)(1-x)^{\varepsilon-3} - \varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)(1-x)^{\varepsilon'-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)} = (1-x)^{\varepsilon'-3-\varepsilon+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}\right)}{\varepsilon'-\varepsilon} = \ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow (1-x) = e^{\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}\right)}{\varepsilon'-\varepsilon}}$$

$$\Leftrightarrow x_W = 1 - e^{\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}\right)}{\varepsilon'-\varepsilon}}$$

Es werden nur $x \in (0,1)$ betrachtet.

Wegen $0 < e^y < \infty$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $x_W < 1$. Zur Sicherung von $x_W > 0$ muss $1 - e^y > 0$ gelten. Ferner ist zu beachten, dass wieder Equityabsenkungen der Form $\varepsilon > \varepsilon'$ betrachtet werden. $\varepsilon' - \varepsilon$ ist negativ.

$$1 - e^y > 0$$

$$\Leftrightarrow e^y < 1$$

$$\Leftrightarrow y < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}\right)}{\varepsilon'-\varepsilon} < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)} > 1$$

Entscheidend ist also das Verhalten des Bruchs $\underbrace{\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}}_{c(\varepsilon, \varepsilon')}$ für $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$. Ein

Wendepunkt im Innern liegt genau dann vor, wenn $c(\varepsilon, \varepsilon') > 1$ ist. Wir betrachten dazu den Verlauf des Polynoms $P(x) = x(x-1)(x-2)$ in $[0,1]$ mittels Standardkurvendiskussion.

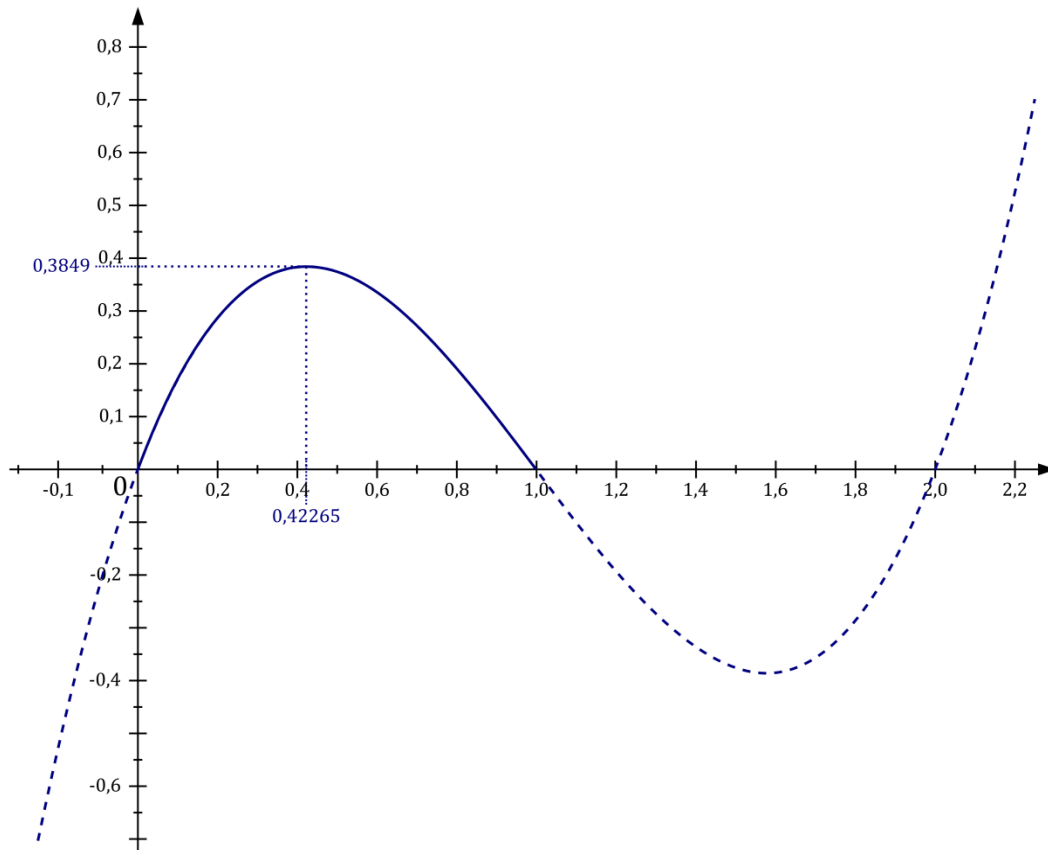


Abb. 6: Polynom $P(x) = x(x-1)(x-2)$ in $[0,1]$

$P'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ hat in $(0,1)$ die Nullstelle $x_W = 1 - \sqrt{1/3} = 0,42265$.

Für $\varepsilon > \varepsilon' \geq 1 - \sqrt{1/3}$ gilt offenbar $\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2) > \varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)$, also für den Bruch

$b(\varepsilon, \varepsilon') < 1$, also ist $(b(\varepsilon, \varepsilon'))^{\frac{1}{\varepsilon'-\varepsilon}} = \left(\frac{1}{b(\varepsilon, \varepsilon')} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} > 1$. In diesem Fall ist also x_W außer-

halb von $(0,1)$. Für $1 - \sqrt{1/3} \geq \varepsilon > \varepsilon'$ ist $b(\varepsilon, \varepsilon') > 1$, also ist

$(b(\varepsilon, \varepsilon'))^{\frac{1}{\varepsilon'-\varepsilon}} = \left(\frac{1}{b(\varepsilon, \varepsilon')} \right)^{\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon'}} < 1$, d.h. für $1 - \sqrt{1/3} \geq \varepsilon > \varepsilon'$ tritt ein Wendepunkt im Innern

von $(0,1)$ auf und zwar an der Stelle $x_W = 1 - e^{\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{\varepsilon'(\varepsilon'-1)(\varepsilon'-2)}\right)}{\varepsilon'-\varepsilon}}$. Dies gilt für $\varepsilon > 1 - \sqrt{1/3}$

ebenfalls genau dann, wenn $\varepsilon' < \varepsilon^*(\varepsilon)$ gilt.

Beweis zu (9): Es bleibt dann noch $x_W \rightarrow 1$ zu zeigen

$$x_W(\varepsilon, \varepsilon') = 1 - e^{\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}\right)}{\varepsilon - \varepsilon'}}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} x_W(\varepsilon, \varepsilon') = 1 \Leftrightarrow \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)} = -\infty$$

Es ist

$$\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} = \frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} + \frac{\ln \frac{(2-\varepsilon')}{(2-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} \leq \frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} + \frac{\frac{2-\varepsilon'}{2-\varepsilon} - 1}{\varepsilon - \varepsilon'} = \frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} + 1.$$

Die Ungleichung gilt wegen $\ln x \leq x - 1$ für $x = \frac{2-\varepsilon'}{2-\varepsilon}$.

Aus $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} \frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} = -\infty$ (s. Beweis zu Satz 3 (5)) folgt dann

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > \varepsilon'}} \frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}}{\varepsilon - \varepsilon'} = -\infty.$$

Ergänzende Aussage

Satz 4

Wir betrachten die oben eingeführten Größen x_W , x_m und $T(\varepsilon, \varepsilon')$, wobei $T(\varepsilon, \varepsilon')$ immer definiert ist, x_m nur wenn ein lokales Maximum der Verlustfunktion existiert und x_W nur, wenn die Verlustfunktion einen Wendepunkt hat. Letzteres impliziert die Existenz eines lokalen Maximums. Insoweit die genannten Punkte existieren, gilt:

$$x_W < x_m < T(\varepsilon, \varepsilon')$$

Beweis:

Es gilt die doppelte Ungleichung

$$1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}}{\varepsilon-\varepsilon'}} \leq 1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon-\varepsilon'}} \leq 1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{\varepsilon-\varepsilon'}} \quad \textcircled{A}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)} \geq \ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \geq \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

Die linke Ungleichung gilt, da $\varepsilon' < \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon' > 2 - \varepsilon \Rightarrow \ln(2 - \varepsilon') > \ln(2 - \varepsilon)$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{2 - \varepsilon'}{2 - \varepsilon} \right) > 0, \text{ also}$$

$$\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)} = \ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \ln \frac{2-\varepsilon'}{2-\varepsilon} > \ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

Die rechte Ungleichung gilt analog, da $\varepsilon' < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon' > 1 - \varepsilon \Rightarrow \ln(1 - \varepsilon') > \ln(1 - \varepsilon)$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{1 - \varepsilon'}{1 - \varepsilon} \right) > 0, \text{ also}$$

$$\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \ln \frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon} > \ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Aus $\textcircled{A}$ folgt:

$$\max \left(0, 1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')(2-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}}{\varepsilon-\varepsilon'}} \right) \leq \max \left(0, 1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'(1-\varepsilon')}{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{\varepsilon-\varepsilon'}} \right) \leq \max \left(0, 1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{\varepsilon-\varepsilon'}} \right) = 1 - e^{-\frac{\ln \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}}{\varepsilon-\varepsilon'}}, \text{ also}$$

$$x_W \leq x_m \leq x_s.$$

Satz 3 eröffnet ein weitgehendes Verständnis für den Verlauf von Verlustfunktionen mit drei prinzipiell verschiedenen Konstellationen bzw. Monotonie, eventuelle Existenz eines lokalen Maximums und eventuelle Existenz eines Wendepunktes. Im Weiteren werden nun verschiedene Verlustfunktionen in ihrem Verlauf verglichen, z.B. mit dem Ziel zu entscheiden, wer wann mehr oder weniger verliert bzw. gewinnt. Besonders interessant sind dabei solche Fälle, in denen einige der auftretenden Parameter in bestimmten Beziehungen zueinander stehen, z.B. Absenkung der Equity in unterschiedlichem Umfang ausgehend von demselben Ausgangsniveau. Dabei können auch mehrere sukzessive Equity-Absenkungen von Interesse sein.

Interessiert man sich für iterierte Equity-Absenkungen, so können solche iterierten Equityabsenkungen z.B. in beliebiger Kombination von gleichen bzw. verschiedenen Schrittweiten sowie sukzessiv bzw. nicht-sukzessiv verglichen werden. Sukzessiv

bedeutet, dass die nächste Absenkung mit dem Equityparameter beginnt, mit dem die vorangegangene endete. Die Auswirkungen einiger derartiger Equityabsenkungen auf Verlustfunktionen behandeln die folgenden Abbildungen und der folgende Satz, bei dem die Verluste mit fortschreitenden Absenkungsschritten jeweils zunehmen.

Beispiel: Absenkungen der Equity, ausgehend von verschiedenen Ausgangsniveaus um denselben Betrag δ .

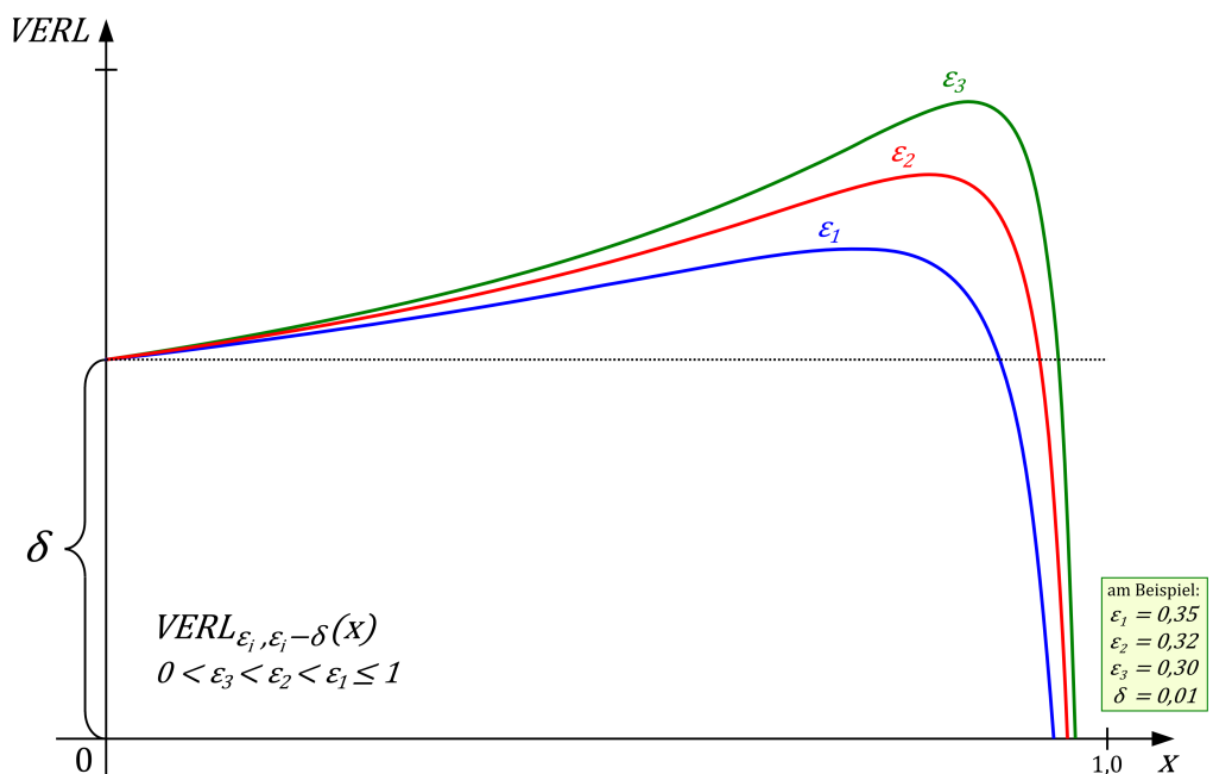


Abb. 7: Monotonie der Verlustfunktionen in ε – Situation von Satz 5 (4)⁸

Im Folgenden wird in 3 Abbildungen illustriert, wie der prinzipielle Verlauf der Kurven in Abbildung 6 im Verhältnis zueinander aussieht, und zwar in Abhängigkeit davon, ob die jeweiligen Verlustfunktionen monoton fallend sind bzw. ein lokales Maximum besitzen.

⁸ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 248 verwiesen.

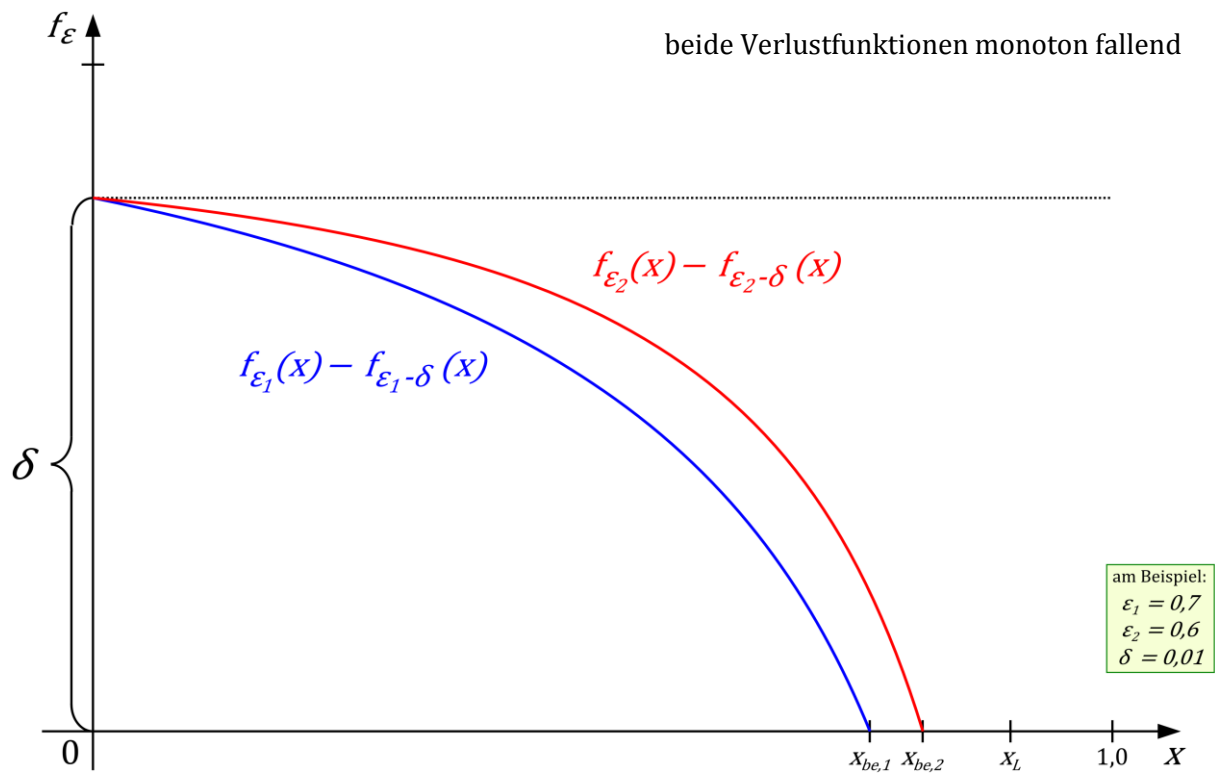


Abb. 8: Monoton fallende Verlustfunktionen in $\mathcal{E}$

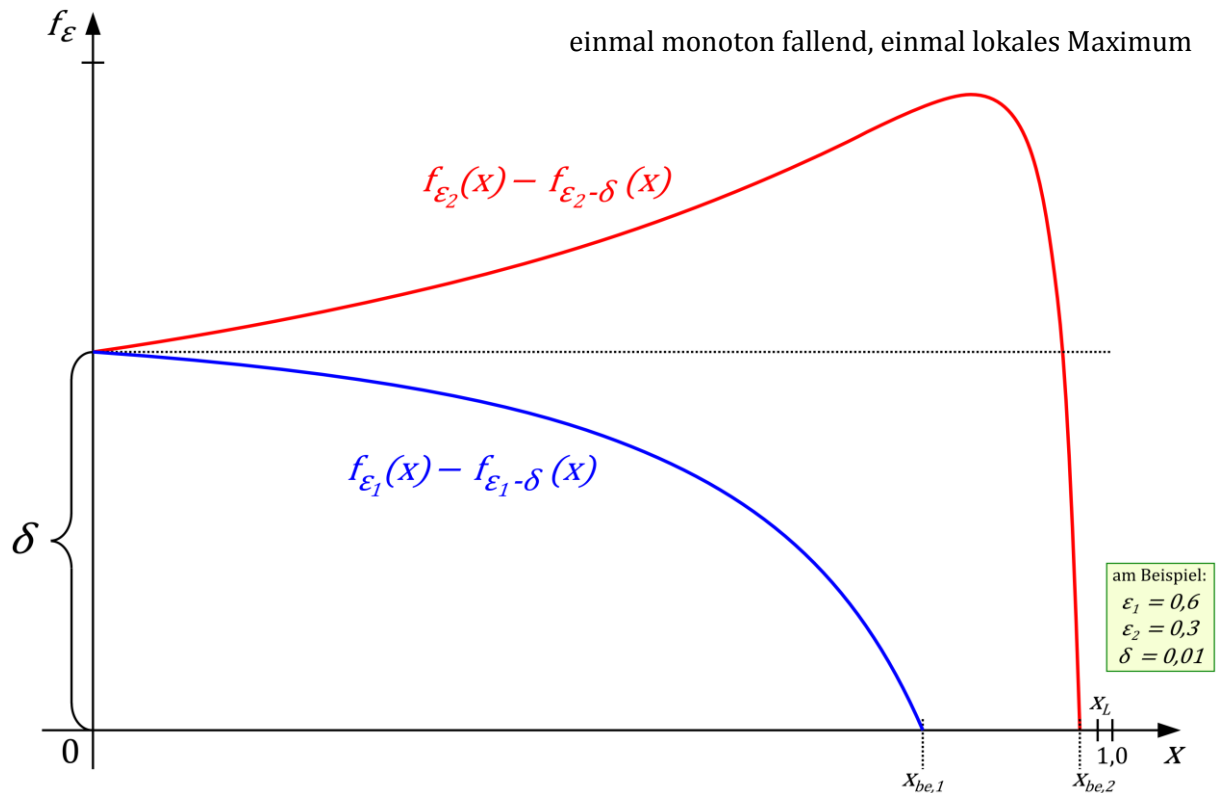


Abb. 9: Unterschiedliches Monotonieverhalten von Verlustfunktionen in $\mathcal{E}$

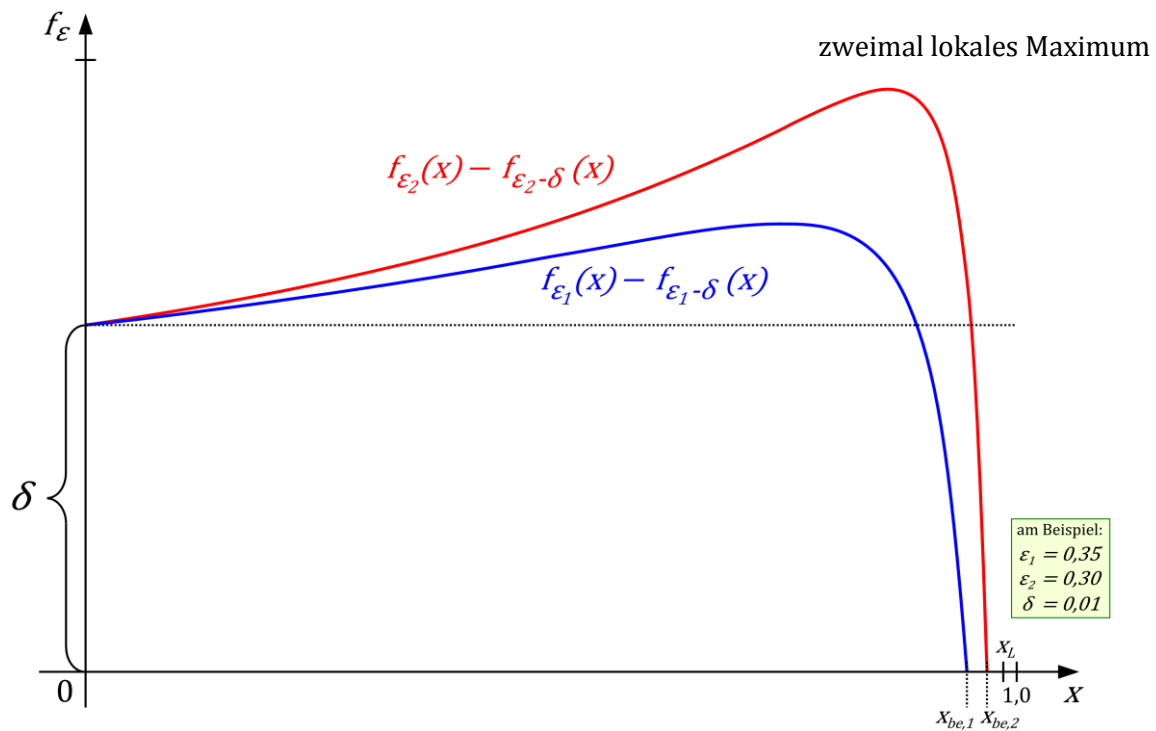


Abb. 10: Verlustfunktionen in ϵ mit lokalem Maximum

Beispiel: Absenkung der Equity vom selben Ausgangsniveau um verschiedene Werte

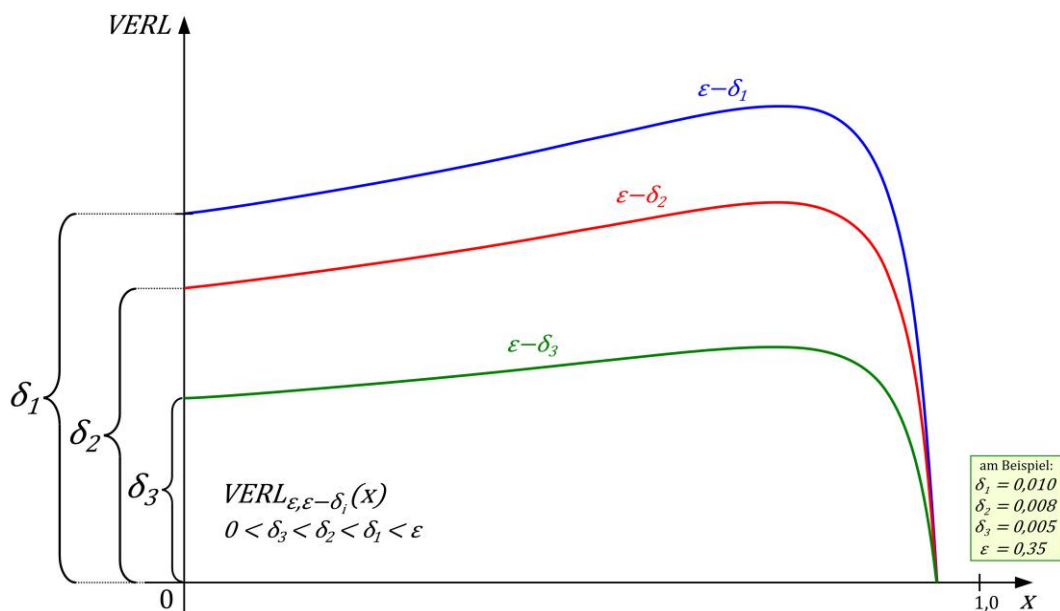


Abb. 11: Monotonie der Verlustfunktionen in δ – Situation von Satz 5 (3)⁹

⁹ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 248 verwiesen.

Hinweis: In der Situation von Abbildung 5 ist die Gültigkeit von $T(\varepsilon, \varepsilon - \delta_1) < T(\varepsilon, \varepsilon - \delta_2) < T(\varepsilon, \varepsilon - \delta_3)$ nach Satz 1 (4) bekannt.

Satz 5 „Verlustfunktionen für Paare von Equityabsenkungen“ ¹⁰

(1) Für sukzessive Absenkungen mit gleicher Schrittweite $\delta > 0$ von $\varepsilon_1 > 2\delta$ an gilt

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)}(x)$$

für alle $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)$. Für $x = 0$ gilt speziell die Gleichheit der Verlustfunktionen, d.h. $VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(0) = VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)}(0) = \delta$.

(2) Für sukzessive Absenkungen mit zunehmender Schrittweite von $\varepsilon_1 > \delta + \delta'$ an und $\delta' > \delta > 0$ gilt

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')}(x)$$

für alle $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')$.

(3) Für nicht-sukzessive Absenkungen mit zunehmender Schrittweite vom selben Equityparameter $\varepsilon_1 > \delta' > \delta > 0$ an gilt

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta')}(x)$$

für alle $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta')$.

(4) Für nicht-sukzessive Absenkungen mit gleicher Schrittweite $\delta > 0$ von verschiedenen Equityparametern $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \delta$ an gilt

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - \delta)}(x)$$

für alle $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta)$.

(5) Für nicht-sukzessive Absenkungen mit zunehmender Schrittweite von verschiedenen Equityparametern $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \delta' > \delta$ an gilt

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - \delta')}(x)$$

für alle $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta')$.

Die Ungleichungen zwischen den Verlustfunktionen gelten auf größeren als den angegebenen Bereichen. Die angegebenen Bereiche sind – ggf. mit Ausnahme von (4) und (5) – nach oben berandet durch den Nulldurchgang der oberen Verlustfunktion,

¹⁰ Vgl. Satz 8.6 (Hauptsatz 2 über Verlustfunktionen); Seite 247 in [1]. Die dortige Aussage (1) entspricht hier der Aussage (4), die dortige Aussage (2) entspricht hier der Aussage (3).

so dass in der Nähe dieses Randes die obere Verlustfunktion jeweils positive Werte und die untere Verlustfunktion jeweils nur negative Werte annimmt.

Beweis zu (1):

Beweisidee: Der Beweis betrachtet den Verlauf der betrachteten Differenzkurven bis zum Schnittpunkt mit der x-Achse. Die Kurven beginnen auf der y-Achse im selben Punkt. Die Schnittpunkte mit der x-Achse (üblicherweise als $T(\varepsilon, \varepsilon')$ bezeichnet, werden hier als $x_{be,1}$ und $x_{be,2}$ bezeichnet. Der Beweis besteht darin zu zeigen, dass die beiden betrachteten Differenzkurven sich außer im Punkt 0 nur ein weiteres Mal an der Stelle x_L schneiden, wobei $x_{be,1} < x_{be,2} < x_L$ gilt. Damit liegt dann $f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x)$ immer oberhalb von $f_{\varepsilon_0}(x) - f_{\varepsilon_1}(x)$, also $f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x) > f_{\varepsilon_0}(x) - f_{\varepsilon_1}(x)$ für $0 < x < x_L$. Damit ist dann Satz 5 bewiesen.

Hinweis: In diesem Beweis sind 3 prinzipiell verschiedene Kurvenverläufe inkludiert, je nachdem ob in den Verlustfunktionen ein lokales Maximum auftritt oder nicht. Die drei Fälle zeigen die vorangegangenen Abbildungen (Prinzipbilder).

Schritt 1: Wir zeigen, dass $f_{\varepsilon_0}(x) - f_{\varepsilon_1}(x) = f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x)$ für $0 \leq x \leq x_{be,2}$ nur die Lösung $x = 0$ hat.

Als Schritt 2 wird dann die Aussage $x_{be,1} < x_{be,2} < x_L$ bewiesen.

Es gilt:

$$f_{\varepsilon_0}(x) - f_{\varepsilon_1}(x) = f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_{\varepsilon_0}(x) + f_{\varepsilon_2}(x)}{2} = f_{\varepsilon_1}(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_{\varepsilon_0}(x) + f_{\varepsilon_2}(x)}{2} = f_{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2}}(x)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \frac{\varepsilon_0 (1-x)^{\varepsilon_0-1} + \varepsilon_2 (1-x)^{\varepsilon_2-1}}{2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2} (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2} - 1} \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon_0 (1-x)^{\varepsilon_0} + \varepsilon_2 (1-x)^{\varepsilon_2} = (\varepsilon_0 + \varepsilon_2) \cdot (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon_0 (1-x)^{\varepsilon_0} - \varepsilon_0 (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2}} = \varepsilon_2 (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2}} - \varepsilon_2 (1-x)^{\varepsilon_2} \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon_0 (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2}} \cdot \left[(1-x)^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{2}} - 1 \right] \stackrel{(*)}{=} \varepsilon_2 (1-x)^{\varepsilon_2} \cdot \left[(1-x)^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{2}} - 1 \right]
\end{aligned}$$

(*) gilt für $x=0$. Für $x>0$ ist $(1-x)^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{2}} - 1 \neq 0$, so dass dividiert werden darf. (*) ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned}
(*) \quad & \Leftrightarrow \quad \varepsilon_0 (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{2}} = \varepsilon_2 (1-x)^{\varepsilon_2} \\
& \Leftrightarrow \quad \varepsilon_0 (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{2}} = \varepsilon_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = (1-x)^{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{2}} \\
& \Leftrightarrow \quad \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{2} \ln(1-x) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_2} = \ln(1-x) \\
& \Leftrightarrow \quad x_L = 1 - e^{\frac{2 \cdot \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}}
\end{aligned}$$

Damit ist Schritt 1 bewiesen, sofern Schritt 2 nachgewiesen werden kann.

Schritt 2:

Wir zeigen $x_{be,2} < x_L$:

$$x_{be,2} < x_L$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} < 1 - e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}{2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}}} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}_{\text{---} \ominus \text{---}} > \underbrace{2 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}_{\text{---} \text{---}} \\
&\Leftrightarrow \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} > \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \\
&\Leftrightarrow \ln \varepsilon_2 - \ln \varepsilon_1 > \ln \varepsilon_2 - \ln \varepsilon_0 \\
&\Leftrightarrow -\ln \varepsilon_1 > -\ln \varepsilon_0 \\
&\Leftrightarrow \ln \varepsilon_1 < \ln \varepsilon_0 \\
&\Leftrightarrow \varepsilon_1 < \varepsilon_0
\end{aligned}$$

Als letzter Schritt des Beweises ist jetzt noch Schritt 3 $x_{be,1} < x_{be,2}$ zu zeigen.

Schritt 3:

Nach der Monotonieaussage von Satz 1 (4) gilt

$$x_{be,1} = T(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \underset{\varepsilon_2 < \varepsilon_1}{\leq} T(\varepsilon_0, \varepsilon_2) \underset{\varepsilon_1 < \varepsilon_0}{\leq} T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = x_{be,2}.$$

Beweis zu (2):

Für $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)$ gilt

$$\begin{aligned}
VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')} (x) &= f_{\varepsilon_1 - \delta} (x) - f_{\varepsilon_1 - \delta - \delta'} (x) \\
&= f_{\varepsilon_1 - \delta} (x) - f_{\varepsilon_1 - 2\delta} (x) + f_{\varepsilon_1 - 2\delta} (x) - f_{\varepsilon_1 - \delta - \delta'} (x) \\
&= VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)} (x) + VERL_{(\varepsilon_1 - 2\delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')} (x) \\
&\geq VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)} (x) + VERL_{(\varepsilon_1 - 2\delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')} (x) \\
&> VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)} (x)
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da nach Satz 1 (4) $T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta') > T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)$,

d.h. $VERL_{(\varepsilon_1 - 2\delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')} (x) > 0$ für alle bisher betrachteten x . Die behauptete Unglei-

chung für Verlustfunktionen gilt auch für $T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta) < x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')$, da dort gemäß $T(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta) < T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - 2\delta)$ gilt $VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) < 0 \leq VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta - \delta')}(x)$.

Beweis zu (3):

$$\begin{aligned} & VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta')}(x) \\ \Leftrightarrow & f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_1 - \delta}(x) \leq f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_1 - \delta'}(x) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq f_{\varepsilon_1 - \delta}(x) - f_{\varepsilon_1 - \delta'}(x) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta')}(x). \end{aligned}$$

Wegen $\delta' > \delta$ ist die letzte Ungleichung gültig für alle $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_1 - \delta')$.

Beweis zu (4):

$$\begin{aligned} & VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - \delta)}(x) \\ \Leftrightarrow & f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_1 - \delta}(x) \leq f_{\varepsilon_2}(x) - f_{\varepsilon_2 - \delta}(x) \\ \Leftrightarrow & \varepsilon_1(1-x)^{\varepsilon_1} - (\varepsilon_1 - \delta)(1-x)^{\varepsilon_1 - \delta} \leq \varepsilon_2(1-x)^{\varepsilon_2} - (\varepsilon_2 - \delta)(1-x)^{\varepsilon_2 - \delta} \\ \Leftrightarrow & \varepsilon_1(1-x)^{\varepsilon_1} \cdot [1 - (1-x)^{-\delta}] + \delta(1-x)^{\varepsilon_1 - \delta} \leq \varepsilon_2(1-x)^{\varepsilon_2} \cdot [1 - (1-x)^{-\delta}] + \delta(1-x)^{\varepsilon_2 - \delta} \end{aligned}$$

Die Ungleichung wird zunächst für $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ nachgewiesen, indem gezeigt wird, dass dort die Ungleichungen

$$\delta(1-x)^{\varepsilon_1 - \delta} \leq \delta(1-x)^{\varepsilon_2 - \delta} \quad (\text{A})$$

$$\varepsilon_1(1-x)^{\varepsilon_1} \cdot [1 - (1-x)^{-\delta}] \leq \varepsilon_2(1-x)^{\varepsilon_2} \cdot [1 - (1-x)^{-\delta}] \quad (\text{B})$$

gelten. Addition liefert die beabsichtigte Ungleichung zwischen den Verlustfunktionen. Um den Gültigkeitsbereich dieser Ungleichung nach oben zu erweitern wird umgeordnet:

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - \delta)}(x)$$

$$\Leftrightarrow f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_1 - \delta}(x) \leq f_{\varepsilon_2}(x) - f_{\varepsilon_2 - \delta}(x)$$

$$\Leftrightarrow f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x) \leq f_{\varepsilon_1 - \delta}(x) - f_{\varepsilon_2 - \delta}(x)$$

$$\Leftrightarrow VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x) \leq VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta)}(x)$$

Für den Erweiterungsbereich $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta)$ gilt

$$VERL_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}(x) \leq 0 \leq VERL_{(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta)}(x),$$

so dass (4) nachgewiesen ist, sobald (A) und (B) nachgewiesen sind.

Nachweis (B):

Es ist $\varepsilon_1(1-x)^{\varepsilon_1} \geq \varepsilon_2(1-x)^{\varepsilon_2} > 0$ für $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, da die Ungleichung für $x=0$ gilt (wegen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) und da beide Funktionen den eindeutigen Schnittpunkt $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ haben:

$$\varepsilon_1(1-x)^{\varepsilon_1} = \varepsilon_2(1-x)^{\varepsilon_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = (1-x)^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \ln(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - e^{\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} = T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

Nun ist $1 - (1-x)^{-\delta} \leq 0$ für $0 \leq x \leq 1$. Also ergibt sich

$$\varepsilon_1(1-x)^{\varepsilon_1} \cdot [1 - (1-x)^{-\delta}] \leq \varepsilon_2(1-x)^{\varepsilon_2} \cdot [1 - (1-x)^{-\delta}].$$

Nachweis (A):

Wegen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ist $(1-x)^{\varepsilon_1} \leq (1-x)^{\varepsilon_2}$ für $0 \leq x \leq 1$. Also $\delta(1-x)^{\varepsilon_1 - \delta} \leq \delta(1-x)^{\varepsilon_2 - \delta}$.

Beweis zu (5):

$$\begin{aligned} \text{VERL}_{(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - \delta')}(x) &= \text{VERL}_{(\varepsilon_2, \varepsilon_2 - \delta)}(x) + \text{VERL}_{(\varepsilon_2 - \delta, \varepsilon_2 - \delta')}(x) \\ &\geq \text{VERL}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) + \text{VERL}_{(\varepsilon_2 - \delta, \varepsilon_2 - \delta')}(x) \\ &\geq \text{VERL}_{(\varepsilon_1, \varepsilon_1 - \delta)}(x) \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung gilt für $0 \leq x \leq T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta)$ gemäß (4), die zweite Ungleichung gilt für $0 \leq x \leq T(\varepsilon_2 - \delta, \varepsilon_2 - \delta')$, also auf dem gesuchten Bereich, da $T(\varepsilon_1 - \delta, \varepsilon_2 - \delta) < T(\varepsilon_2 - \delta, \varepsilon_2 - \delta')$.

Im Weiteren stehen charakteristische Punkte von Verlustfunktionen und deren Verhalten in Abhängigkeit von den Equitypunkten ε und einem eventuellen Absenkungsparameter $\delta > 0$ im Zentrum der Untersuchungen. Es sind dies die folgenden:

- (1) Das in Verbindung mit Satz 3 untersuchte Maximum einer Verlustfunktion im Innern von $(0;1)$, sofern ein solches existiert,
- (2) die in Satz 1 untersuchten unteren Gewinnergrenzen,
- (3) ein bisher nicht betrachteter Punkt $x_{iso}^\delta(\varepsilon)$, an dem der Verlust für eine (eindeutige) Einkommensposition im Innern von $(0;1)$ genau dem Verlust an der Stelle $x = 0$ entspricht.

Die folgende Abbildung veranschaulicht die Größen bzw. Funktionen.

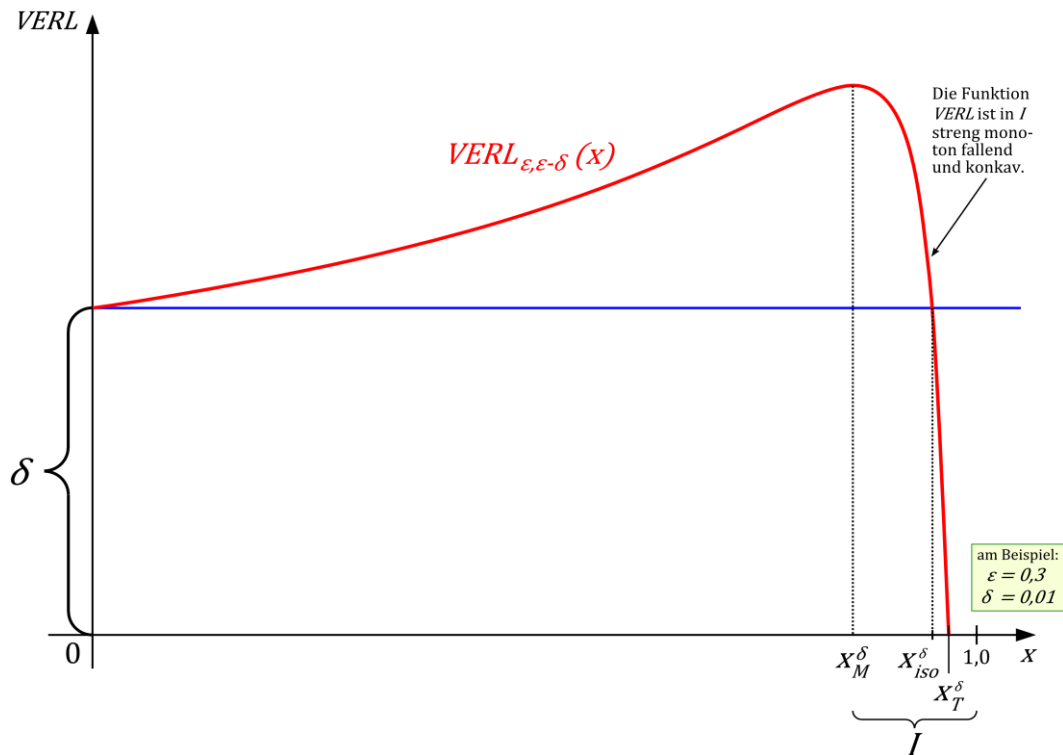


Abb. 12: Betrachtete Parameter¹¹

Definition

1. $X_M^\delta(\epsilon) := x_M$ bezeichnet die **Stelle des (inneren) Maximums** der Verlustfunktion bei Absenkung des Ausgleichsniveaus von ϵ auf $\epsilon - \delta$ **als Funktion von ϵ** , $0 < \epsilon \leq 0,5$
2. $X_T^\delta(\epsilon) := T(\epsilon, \epsilon - \delta)$ bezeichnet die **untere Gewinnergrenze** bei Absenkung des Ausgleichsniveaus von ϵ auf $\epsilon - \delta$ **als Funktion von ϵ** , $0 < \epsilon \leq 1$
3. $X_{ISO}^\delta(\epsilon) := x_{ISO}^\delta$ bezeichnet für $0 < \epsilon \leq 0,5$ die Stelle der Verlustfunktion im Inneren von $(0,1)$, an der der Verlust identisch ist mit dem Verlust an der Stelle $x = 0$. Es gilt also: $VERL_{\epsilon, \epsilon - \delta}(x_{ISO}^\delta) = \delta$.

Die inneren Maxima und die unteren Gewinnergrenzen wurden, wie bereits erwähnt, in den Sätzen 1 und 2 thematisiert. Die Funktion X_{ISO}^δ ist nur implizit definiert. Man nutzt dabei aus, dass die Verlustfunktion $VERL_{(\epsilon, \epsilon - \delta)}$ zwischen X_M^δ und X_T^δ stetig und streng monoton ist. Stetigkeit und strenge Monotonie (und damit der Satz 3) implizie-

¹¹ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 250 verwiesen.

ren, dass es genau einen Punkt x_{ISO}^δ der geforderten Art für jedes betrachtete ε gibt. Der Verlust in diesem Punkt entspricht genau dem Verlust in $x = 0$. $VERL_{(\varepsilon, \varepsilon - \delta)}$ ist des Weiteren konkav zwischen x_W^δ und x_T^δ , und zwar als Folge der Eindeutigkeit und Lage des Wendepunktes von $VERL_{(\varepsilon, \varepsilon - \delta)}$ (falls dieser existiert) links von x_M^δ . Es gilt außerdem aufgrund von Satz 4 immer: $X_M^\delta < X_{ISO}^\delta < X_T^\delta$.

Die folgende Abbildung illustriert die implizit definierte Größe X_{ISO}^δ als Funktion von ε , $0 < \varepsilon \leq 0,5$ und δ , $\delta > 0$:

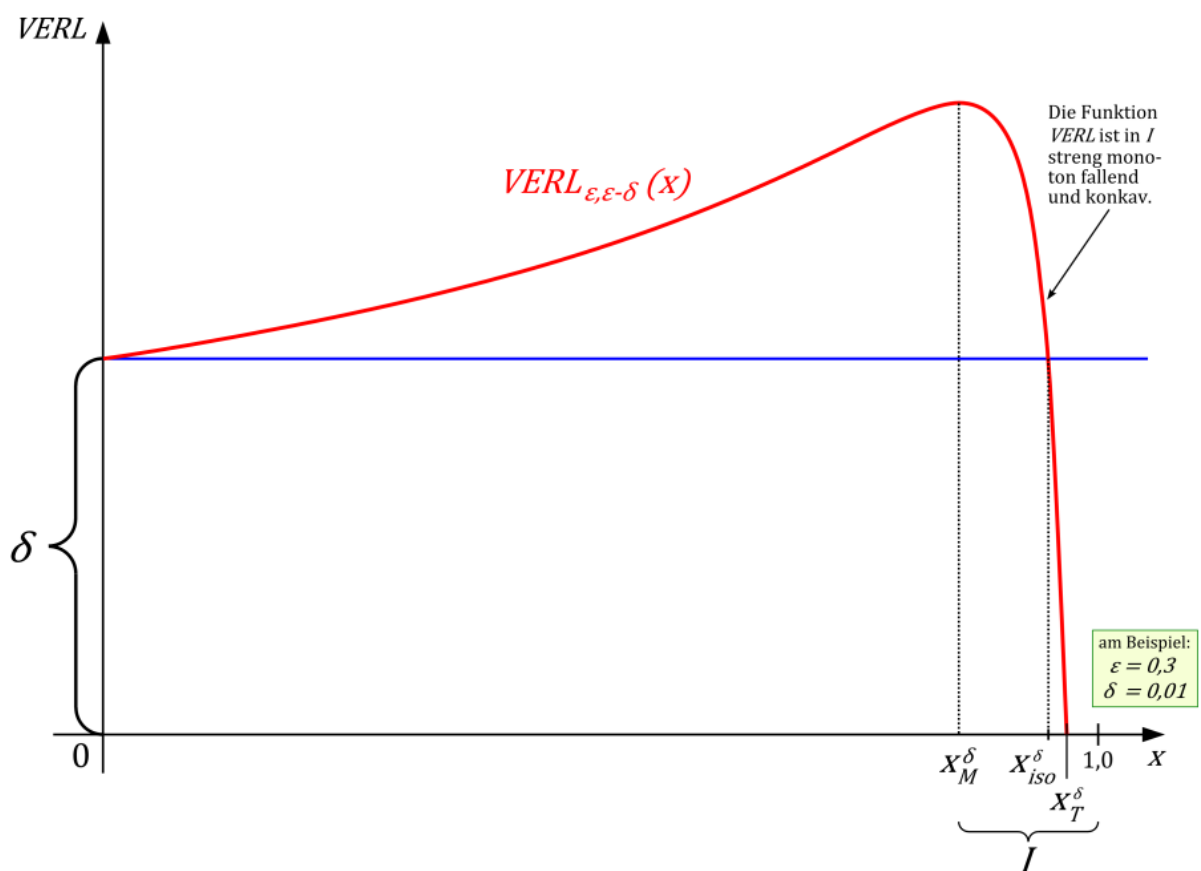


Abb. 13: Lage des Punktes x_{ISO}^δ ¹²

Im Weiteren wird die Frage nach dem Limesverhalten der drei betrachteten Funktionen X_M^δ , X_{ISO}^δ und X_T^δ für $\delta \rightarrow 0$ behandelt. Das Limesverhalten für die untere Gewinnergrenze kann sehr schön in Abbildung 12 verfolgt werden. Nur weil ein solches

¹² Auf diese Abbildung wird in [1], S. 250 verwiesen.

Verhalten gegeben ist, das seinerseits Folge eines Monotonieverhaltens der betrachteten Funktionen ist, ist es möglich, Aussagen über Grenzwerte bei inkrementellen Absenkungen des Ausgleichsniveaus zu treffen.

Satz 6¹³

Für die drei Kenngrößen der Verlustfunktionen x_M^δ , x_T^δ und x_{ISO}^δ gilt:

(1) $\lim_{\delta \rightarrow 0} x_M^\delta(\varepsilon)$ existiert und ist gegeben durch $x_M(\varepsilon) = 1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}}$ für $0 < \varepsilon \leq 0,5$.

x_M ist streng monoton fallend und konkav in $0 < \varepsilon \leq 0,5$.

(2) $\lim_{\delta \rightarrow 0} x_T^\delta(\varepsilon)$ existiert und ist gegeben durch $x_T(\varepsilon) = 1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon}}$ für $0 < \varepsilon \leq 1$.

x_T ist streng monoton fallend und konkav in $0 < \varepsilon \leq 0,5$ und konvex in $0,5 \leq \varepsilon \leq 1$.

(3) $\lim_{\delta \rightarrow 0} x_{ISO}^\delta(\varepsilon) = x_{ISO}(\varepsilon)$ existiert für $0 < \varepsilon \leq 0,5$.

Eine analytische Darstellung von x_{ISO}^δ ist bisher nicht bekannt. Über numerische Verfahren lässt sich jedoch der Verlauf von X_{ISO} bestimmen. Das geschieht in Abb. 14. X_{ISO} ist streng monoton fallend in $0 < \varepsilon \leq 0,5$. Die numerische Auswertung gibt starke Hinweise darauf, dass X_{ISO} konkav ist. Die mathematische Herleitung dieser Eigenschaft ist offen.

Zur Illustration betrachte man die nachfolgende Abbildung.

¹³ Vgl. Satz 8.7 (Limessatz zu Kenngrößen für Verlustfunktionen); Seite 250 in [1]. Abbildung wird zitiert auf Seite 251 in [1].

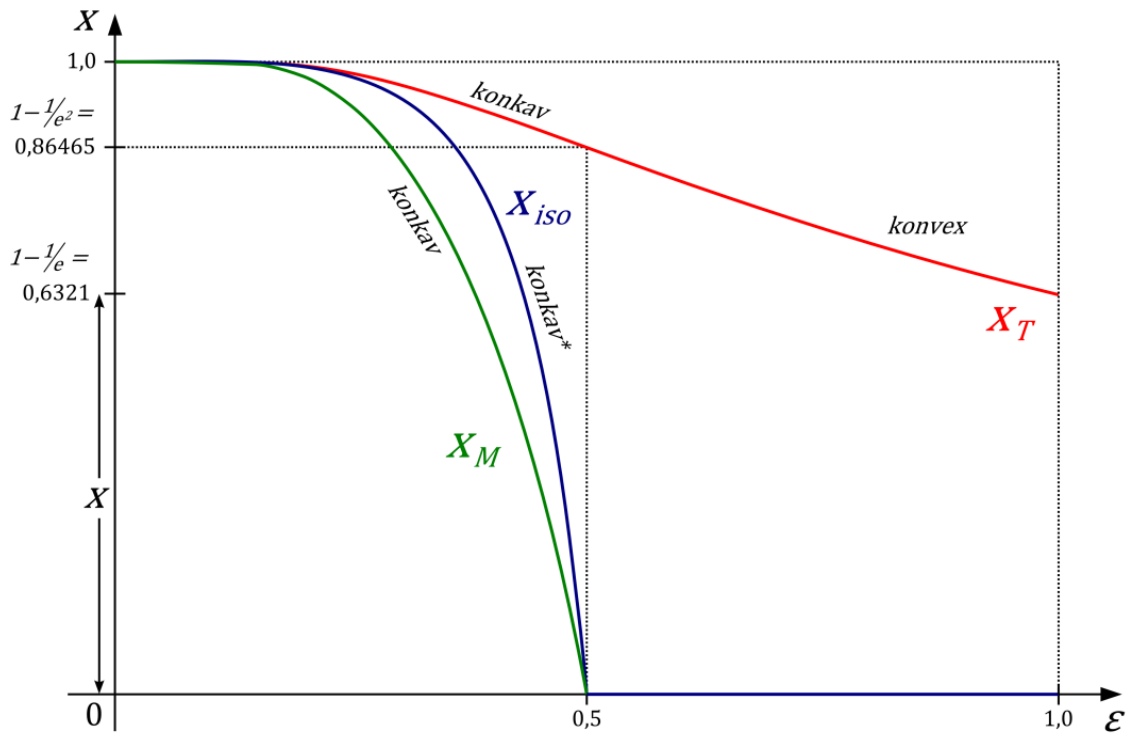


Abb. 14: Verlauf der Funktionen des Limessatzes¹⁴

Beweis zu Satz 6 (1):

Mit $\varphi(\varepsilon) = \frac{-1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}$ ergibt sich für die ersten beiden Ableitungen von $x_M(\varepsilon) = e^{\varphi(\varepsilon)}$:

$$x_M'(\varepsilon) = -e^{\varphi(\varepsilon)} \cdot \varphi(\varepsilon) = -e^{\varphi(\varepsilon)} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \right] < 0, \text{ d.h. } x_M(\varepsilon) \text{ ist monoton fallend.}$$

$$x_M''(\varepsilon) = -e^{\varphi(\varepsilon)} \cdot \varphi'^2(\varepsilon) - e^{\varphi(\varepsilon)} \cdot \varphi''(\varepsilon) = -e^{\varphi(\varepsilon)} \cdot \left[(\varphi'(\varepsilon))^2 + \varphi''(\varepsilon) \right] < 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \varphi'(\varepsilon)^2 + \varphi''(\varepsilon) &= \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \right)^2 - \frac{2}{\varepsilon^3} + \frac{2}{(1-\varepsilon)^3} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^4} - \frac{2}{\varepsilon^3} + \frac{2}{(1-\varepsilon)^3} \\ &= \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon^4} + \frac{2}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon)^4} + \frac{2}{(1-\varepsilon)^3} > 0 \end{aligned}$$

¹⁴ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 251 verwiesen.

Wegen $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ ist $1 - 2\varepsilon \geq 0$, d.h. der erste Summand ist positiv. Alle anderen auch wegen $\varepsilon > 0$. Damit ist x_M für $0 < \varepsilon \leq 0,5$ konkav.

Beweis zu Satz 6 (2):

Für $x_T(\varepsilon) = 1 - e^{-1/\varepsilon}$ gilt $x_T'(\varepsilon) = -e^{-1/\varepsilon} \cdot \frac{-1}{\varepsilon^2} < 0$, also ist die Funktion monoton fallend für

$0 < \varepsilon \leq 1$. Weiterhin ist $x_T''(\varepsilon) = -e^{-1/\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon^4} + e^{-1/\varepsilon} \cdot \frac{2}{\varepsilon^3} = \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon^3} \cdot \frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{e^{-1/\varepsilon}}{\varepsilon^4} \cdot (2\varepsilon - 1)$.

Damit ist unmittelbar erkennbar, dass

$$x_T''(\varepsilon) = \begin{cases} \leq 0 & \text{für } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \\ = 0 & \text{für } \varepsilon = \frac{1}{2} \\ \geq 0 & \text{für } \frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

Damit ist $x_T(\varepsilon)$ konkav auf $(0, \frac{1}{2}]$ und konvex auf $[\frac{1}{2}, 1]$.

Beweis zu Satz 6 (3):

X_{ISO} existiert aufgrund des Monotonieverhaltens in Satz 5 (3). Die Werte $x_{ISO}^\delta(\varepsilon)$ sind dort für fallende $\delta > 0$ monoton fallend, wobei wegen $x_{ISO}^\delta \leq x_{ISO}$ für alle $0 < \varepsilon \leq 0,5$ die Konvergenz folgt. Die strenge Monotonie folgt entsprechend.

Satz 7¹⁵

Anmerkung: x_m wird als x_M geschrieben

1. Die Umkehrfunktion $X_M^{-1}(x)$ ist gegeben durch $X_M^{-1}(x) = \frac{\ln(1-x)-2}{2 \cdot \ln(1-x)} - \sqrt{\frac{4+\ln^2(1-x)}{4 \cdot \ln^2(1-x)}}$

X_M^{-1} ist streng monoton fallend und konkav für $0 < x < 1$.

¹⁵ Vgl. Satz 8.8 (Umkehrsatz zu Kenngrößen für Verlustfunktionen); Seite 252 in [1]

2. Die Umkehrfunktion $X_T^{-1}(x)$ ist gegeben durch $X_T^{-1}(x) = -\frac{1}{\ln(1-x)}$
 $X_T^{-1}(x)$ ist streng monoton fallend für $1 \geq x \geq 1 - \frac{1}{e}$. Für $x \geq 1 - \frac{1}{e^2}$ ist $X_T^{-1}(x)$ konkav, im übrigen Bereich konvex.
3. $X_{ISO}^{-1}(x)$ kann bisher analytisch nicht dargestellt werden. $X_{ISO}^{-1}(x)$ ist streng monoton fallend und konkav (sofern dies für X_{ISO} zutrifft).

Zur Illustration vergleiche beiliegende Abbildung.¹⁶

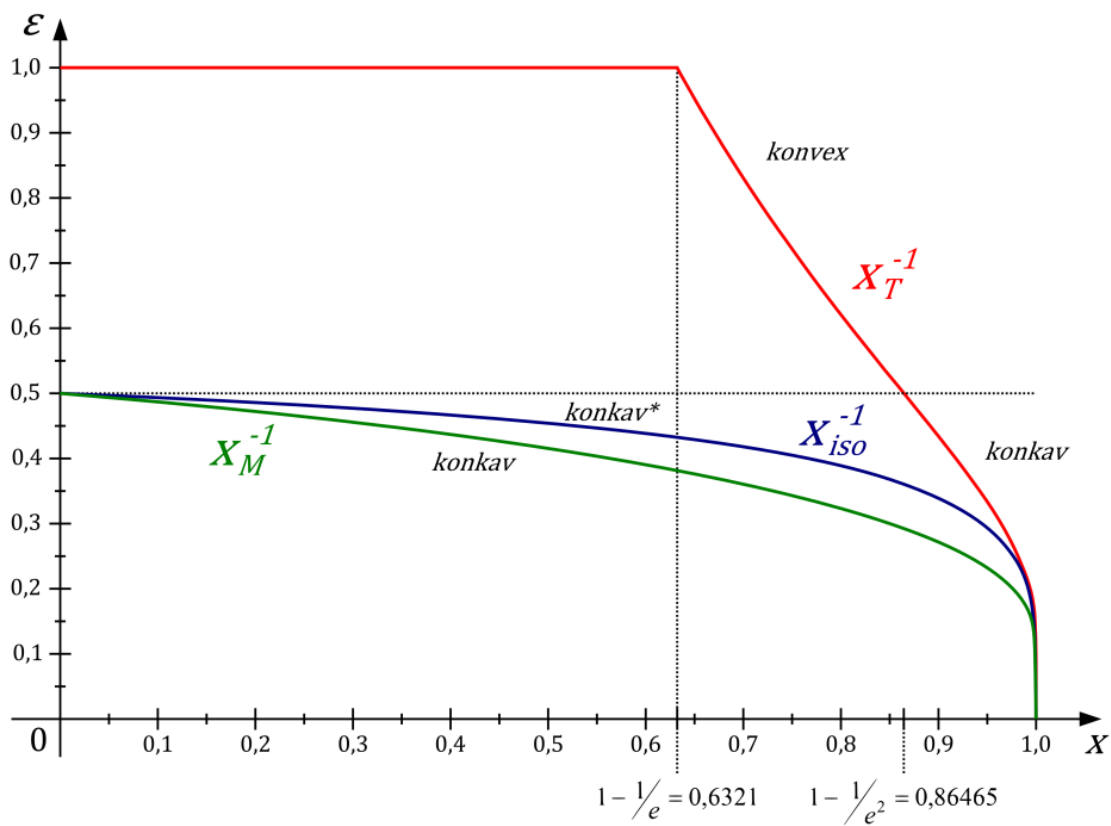


Abb. 15: Umkehrfunktionen

¹⁶ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 253 verwiesen.

Beweis:

Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

Schritt 1: Existenz, analytische Eigenschaften und generelles Verhalten sowie Hinweis zu (3).

Aus der Literatur zu reellen Funktionen einer Variablen ist zunächst bekannt, dass die Umkehrfunktionen streng monotoner Funktionen existieren. Des Weiteren gilt:

Die Umkehrfunktion streng monoton fallender konkaver (konvexer) Funktionen ist wieder streng monoton fallend und konkav (konvex). Bei streng monoton wachsender Funktion bleibt diese Eigenschaft erhalten, aber die Eigenschaften Konvexität und Konkavität werden vertauscht.

Bezüglich Satz 7 (3) ist X_{ISO}^{-1} nur numerisch bestimmt und offensichtlich konkav. Die „Sandwich“-Position von X_{ISO}^{-1} zwischen X_M und X_T plausibilisiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ die numerisch demonstrierte Konkavitätsaussage für X_{ISO}^{-1} .

Schritt 2:

Die Umkehrfunktion von $u = 1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}}$ für $0 < \varepsilon \leq 0,5$ ist

$$\varepsilon = \frac{\ln(1-u) - 2}{2 \cdot \ln(1-u)} - \sqrt{\frac{4 + \ln^2(1-u)}{4 \cdot \ln^2(1-u)}} \quad \text{für } 0 < u < 1$$

$$u = 1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}} \Leftrightarrow 1-u = e^{\frac{-1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}} \Leftrightarrow h = \ln(1-u) = \frac{-1}{\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow (1-\varepsilon) \cdot h = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + 1 = 2 - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \cdot h - \varepsilon^2 \cdot h = 2 \cdot \varepsilon - 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 \cdot h + (2-h) \cdot \varepsilon - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 + \frac{2-h}{h} \cdot \varepsilon - \frac{1}{h} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \varepsilon_{1/2} &= -\frac{2-h}{2h} \pm \sqrt{\frac{(2-h)^2}{4h^2} + \frac{1}{h}} = -\frac{2-h}{2h} \pm \sqrt{\frac{4-4h+h^2+4h}{4h^2}} \\
\Rightarrow \quad &= -\frac{2-h}{2h} \pm \sqrt{\frac{4+h^2}{4h^2}} = \frac{h-2}{2h} \pm \sqrt{\frac{4+h^2}{4h^2}} = \frac{h-2}{2h} \pm \frac{\sqrt{4+h^2}}{2|h|} \\
\Rightarrow \quad \varepsilon(u) &= \frac{\ln(1-u)-2}{2\ln(1-u)} \pm \frac{\sqrt{4+\ln^2(1-u)}}{-2|\ln(1-u)|}
\end{aligned}$$

Die Frage, welche der beiden potentiellen Lösungen die richtige ist, kann durch Ausprobieren geklärt werden. Es ergibt sich die „-“ Variante.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(u) &= \frac{\ln(1-u)-2}{2\ln(1-u)} - \frac{\sqrt{4+\ln^2(1-u)}}{2|\ln(1-u)|} \\
&= \frac{\ln(1-u)-2}{2\ln(1-u)} + \frac{\sqrt{4+\ln^2(1-u)}}{2|\ln(1-u)|} \\
&= \frac{\ln(1-u)-2+\sqrt{4+\ln^2(1-u)}}{2\ln(1-u)}
\end{aligned}$$

Damit ist Schritt 2 bewiesen.

$$\text{Schritt 3: } X_T^{-1} = -\frac{1}{\ln(1-x)}$$

$$X_T(\varepsilon) = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = u$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 1-u$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} = \ln(1-u)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{-1}{\ln(1-u)}$$

Damit ist Schritt 3 bewiesen.

Bifurkation und verwandte Fragen

Im Weiteren wird der Frage nachgegangen, wann in Verbindung mit dem Ziel einer inkrementellen Equityabsenkung von ε auf $\varepsilon - \delta$, $\delta > 0$, δ beliebig klein, wie sie in [1, 2] diskutiert wird, eine Aufspaltung der in den genannten Arbeiten betrachteten „bürgerlichen“ Koalition $[0,5;1]$ erfolgt, sofern kostengünstige Lösungen aus Sicht der hohen Einkommen $[T(\varepsilon, \varepsilon - \delta);1]$ angestrebt werden. Eingebettet ist diese Frage in den allgemeinen Kontext einer Aufspaltung bei größeren Equityabsenkungen von ε_1 auf ε_2 mit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, wie sie vor allem in [2] untersucht werden. Beide Fragen stellen sich in den genannten Arbeiten für den sogenannten **statischen Fall** (die Einkommensposition $[0;0,5]$ und $[0,5;T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)]$ treten nur als Ganzes in eine Koalition ein) und im **opportunistischen Fall** (die Segmente $[0;0,5]$ und $[0,5;T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)]$ lassen sich beliebig auftrennen).

Analog kann in allen betrachteten Fällen gefragt werden, wann das Segment $[T(\varepsilon, \varepsilon - \delta);1]$ alleine eine geforderte Stimmstärke $\beta \in (0,1)$ hat und wann die Vereinigung $[0;0,5] \cup [0,5;T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)]$ eine erforderliche Stimmstärke hat, so dass eine All-Parteienkoalition zur Erreichung einer bestimmten Stimmstärke $\beta \in (0,1)$ nicht erforderlich ist.

Die Verfolgung dieser Fragen, in Ergänzung zum Bifurkationsthema, ist ein wichtiger Beitrag von [1]. Dieser führt zu einem kompakten Überblick über die jeweils günstigsten Koalitionsmöglichkeiten aus Sicht des Segments der hohen Einkommen. Dieser kompakte Überblick findet sich in [1] für den inkrementellen Fall in den beiden Abbildungen 8-21 und 8-33, für beliebige Absenkungen der Equity in den Abbildungen 8-20 und 8-31. Den Schlüssel zur Antwort auf die Thematik der allgemeinen Absenkung liefert die nachfolgende Funktion $J_\beta(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in \left(\frac{-1}{\ln(\beta)}, 1\right]$

Koalitionswechselfunktion

Im Weiteren interessiert die mathematische Beschreibung des Übergangs von einer Situation, in der das obere Segment keinen Koalitionspartner benötigt zu einer Situation, in der es alleine nicht mehr die notwendige Stimmstärke aufbringt. Die Beschreibung wird durch eine sog. **Koalitionswechselfunktion** geleistet.

Das obere Segment braucht bei geforderter Stimmstärke β mit $0 < \beta < 1$ offenbar keinen Koalitionspartner, solange $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 1 - \beta$ gilt. Im Grenzfall einer inkrementellen Absenkung vom Typ $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \delta$, $\delta > 0$, δ beliebig klein bedeutet dass wegen Satz 1 (5) $T(\varepsilon) = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \leq 1 - \beta \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \geq \beta$. Dieser Fall kann nur auftreten, wenn $0 < \beta \leq 0,3678$ gilt.

Definition: Koalitionswechselfunktion

Im beschriebenen Kontext beschreibt die Koalitionswechselfunktion

$J_\beta(\varepsilon_1): \left(\frac{-1}{\ln(\beta)}, 1\right] \rightarrow (0,1]$, die implizit durch $J_\beta(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \beta$ für $0 < \beta < 1/e$ definiert ist, für welches Ausgleichsniveau ε_2 bei gegebenem ε_1 und gegebenem β der Übergang von der bürgerlichen Koalition zur gespaltenen Koalition erfolgt. D.h. für $\varepsilon_2' > \varepsilon_2$ ist noch die bürgerliche Koalition besser, für $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_2'$ nicht mehr.

Hinweis:

Die Funktion $J_\beta(\varepsilon_1)$ ist offenbar wohldefiniert. Sie kann (bisher) nur numerisch bestimmt werden, z.B. mit der folgenden Scilabfunktion (bezieht sich auf das freie, weitgehend mit dem Standardsystem „MATLAB“ kompatible Computer-Algebrasystem Scilab (vgl. www.scilab.org)). Die angegebene Funktion löst die definierende, implizite Gleichung mittels sukzessiver Bisektion für einen gegebenen Wert β und einen Ausgangswert ε_1 . (Interne Variablenbezeichnungen sind abweichend!)

```

// Berechnung von epsilon_1_beta
function w = epsilon_1_beta(epsilon_0)
eps_l = 0;
eps_u = epsilon_0;
while eps_u - eps_l > 10^(-15) do
eps_m = 0.5*(eps_l + eps_u);
if 1 - x_be(epsilon_0,eps_m) < beta then eps_l = eps_m; else eps_u = eps_m; end
end // end while
w = 0.5*(eps_l + eps_u);
endfunction

```

Die folgende Abbildung zeigt den prinzipiellen Verlauf der Funktion für $0 \leq \beta \leq 0,3678$:

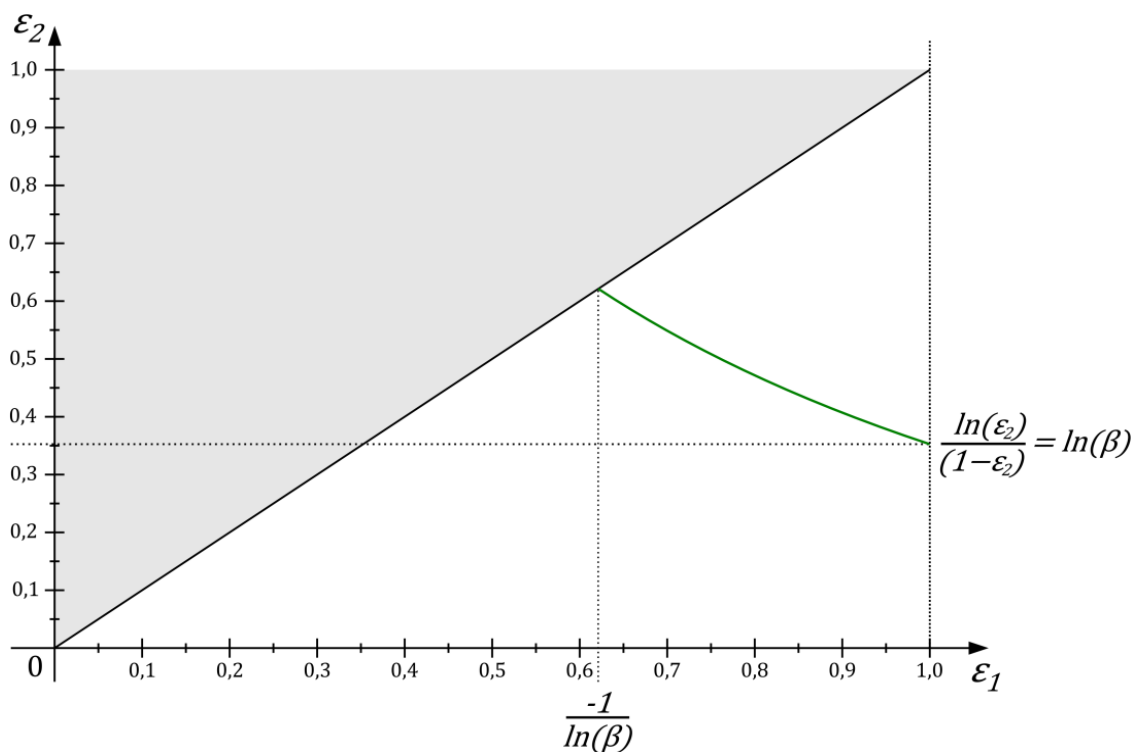


Abb. 16: Prinzipieller Verlauf der Funktion $J_\beta(\epsilon_1)$ ¹⁷

Eine weitere Abbildung veranschaulicht den Verlauf der Funktion $J_\beta(\epsilon_1)$ für drei ausgewählte β -Werte:

¹⁷ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 268 verwiesen.

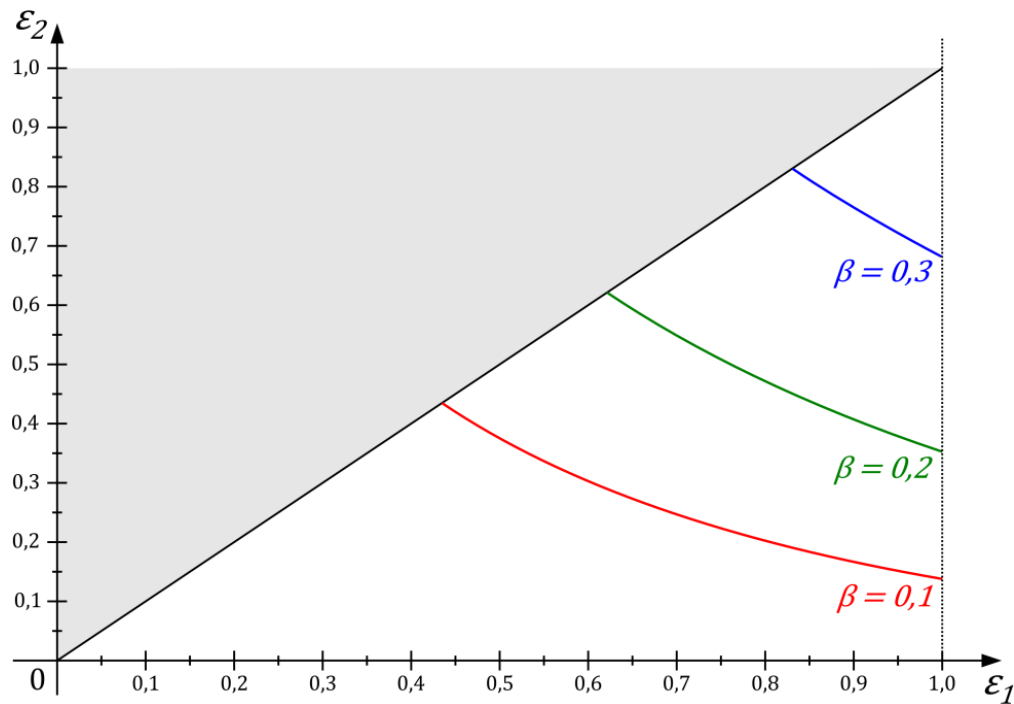


Abb. 17: Verlauf der Funktion $J_\beta(\varepsilon_1)$ für ausgewählte β -Werte¹⁸

Im folgenden Lemma werden wichtige Eigenschaften der Stimmstärkefunktion $J_\beta(\varepsilon_1)$ zusammengefasst:

Lemma 8¹⁹

Die (implizite definierte) Funktion $J_\beta(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in \left(\frac{-1}{\ln(\beta)}, 1\right]$ für $\beta \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ besitzt folgende Eigenschaften:

1. Der Schnittpunkt von $J_\beta(\varepsilon_1)$ und der Geraden $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ liegt an der Stelle $\varepsilon_1 = \frac{-1}{\ln(\beta)}$.
Diese bezeichnet zugleich die Grenze, bis zu der für alle größeren ε inkrementelle Absenkungen noch keine Hinzunahme eines Koalitionspartners erfordern.
2. J_β ist stetig und monoton fallend in ε_1 .
3. J_β ist stetig und monoton wachsend in β .
4. Es gilt: $J_\beta \rightarrow 0$ für $\beta \rightarrow 0$.

¹⁸ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 268 verwiesen.

¹⁹ Vgl. Lemma 8.3; S. 269 in [1]

5. Für $\varepsilon_2 = J_\beta(1)$ ist die Gleichung $\frac{\ln(\varepsilon_2)}{1-\varepsilon_2} = \ln(\beta)$ erfüllt. Diese ist nicht geschlossen lösbar.

Beweis:

$$(1) J_\beta(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \beta \Leftrightarrow 1 - e^{\frac{\ln \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = 1 - \beta \Leftrightarrow e^{\frac{\ln \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = \beta$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1} \frac{\ln \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \stackrel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{=} \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1} \frac{1 \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = -\frac{1}{\varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow \beta = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1} e^{\frac{\ln \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = e^{-\frac{1}{\varepsilon_1}} \Rightarrow -\frac{1}{\varepsilon_1} = \ln \beta \Rightarrow \varepsilon_1 = -\frac{1}{\ln \beta}$$

- (2) Die Stetigkeit in ε_1 ist aufgrund der Definition offensichtlich. Zur Monotonie gilt folgendes:

$$J_\beta(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \beta.$$

Eine Vergrößerung von ε_1 erfordert eine Verkleinerung von ε_2 , damit das Niveau $1 - \beta$ erhalten bleibt. Dies ergibt sich, da $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ in beiden Argumenten monoton fallend ist, siehe Satz 1 (4). D.h. $J_\beta(\varepsilon_1)$ ist monoton fallend bei fixem β .

- (3) Die Stetigkeit in β ist aufgrund der Definition offensichtlich. Zur Monotonie gilt Folgendes: Für ε_1 fix und $\beta < \beta'$ ist $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \beta > 1 - \beta' = T(\varepsilon_1, \varepsilon_2')$ mit $\varepsilon_2 = J_\beta(\varepsilon_1)$ und $\varepsilon_2' = J_{\beta'}(\varepsilon_1)$. Da $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ in beiden Komponenten nach Satz 1 (4) fallend ist, folgt $\varepsilon_2' > \varepsilon_2$.

- (4) Wegen $J_\beta(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \Leftrightarrow T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \beta$ bedeutet die Konvergenz von β gegen 0 für fixes ε_1 , dass $T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ gegen 1 konvergiert. Dies ist nur möglich, wenn $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, d.h. $\lim_{\beta \rightarrow 0} J_\beta(\varepsilon_1) = 0$.

$$(5) \text{ Es ist } T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1 - \beta, \text{ d.h. } 1 - e^{\frac{\ln \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = 1 - \beta, \text{ d.h. } e^{\frac{\ln \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = \beta$$

$$\text{Setzt man } \varepsilon_1 = 1, \text{ so ergibt sich } e^{\frac{\ln \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2}} = \beta, \text{ also } \frac{\ln(\varepsilon_2)}{1 - \varepsilon_2} = \ln \beta.$$

BIFURKATION im statischen Fall

Im Weiteren adressieren wir die inkrementelle Bifurkationsfrage, also die Frage eines möglichen Wechsels von der bürgerlichen Koalition zu der gespalteten Koalition im **statischen Fall**. Wir betrachten dazu beliebige Mehrheitserfordernisse β mit $0 < \beta < 1$ und fragen zunächst nach inkrementellen Equityabsenkungen von ε nach $\varepsilon - \delta = \varepsilon'$, $\delta > 0$ beliebig klein. Es geht dann um die Frage, ob bei einer Absenkung der Equity in inkrementellem Umfang von ε nach $\varepsilon - \delta$ das Segment der hohen Einkommen $[T(\varepsilon, \varepsilon - \delta); 1]$ vor und nach Absenkung kostengünstigst mit der mittleren Gruppe $[0,5; T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)]$ koalitiert oder mit dem Segment $[0; 0,5]$.

Offenbar stellt sich die Frage der Aufspaltung uneingeschränkt nur für $0,368 \leq \beta \leq 0,5$. Für $0 < \beta < 0,368$ stellt sich die Frage dann, wenn $\varepsilon \leq \frac{-1}{\ln(\beta)}$, weil sonst nämlich das gewinnende Segment schon alleine eine ausreichende Größe für die erforderliche Stimmstärke hat.

Generell ist in dieser Situation folgendes vorab feststellbar. Die Frage einer Entscheidung zwischen beiden Koalitionsoptionen stellt sich nur für Stimmerfordernisse $\beta \leq 1/2$, da die bürgerliche Koalition $[0,5; 1]$ maximal 50% der Stimmen aufbringt. Hinzu kommt, wie bereits erwähnt, folgendes: für $\beta < 0,368$ und $\varepsilon \leq \frac{-1}{\ln(\beta)}$ braucht das Segment der hohen Einkommen keinen Koalitionspartner. In all den verbleibenden Fällen, in denen die Wahl zwischen den beiden Koalitionsoptionen relevant ist, ist diese **wegen der statischen Parteienstruktur von β unabhängig**. Es reicht also die Analyse von z.B. dem Fall $\beta = 1/2$.

Wir fragen im Folgenden nach den kumulativen Einkommen der beiden Koalitionspartner im statischen Fall. Für das Segment $[0; 0,5]$ hat dies den Wert $F_\varepsilon(0,5)$, für das Segment $[0,5; T(\varepsilon)]$ den Wert $F_\varepsilon(T(\varepsilon)) - F_\varepsilon(0,5)$, dies jeweils in Abhängigkeit von dem jeweiligen Equityfaktor ε . Hier gilt zunächst

Lemma 9

- (1) $F_\varepsilon(0,5) + (F_\varepsilon(T(\varepsilon)) - F_\varepsilon(0,5)) = F_\varepsilon(0,5) = 1 - 1/e$, d.h. die Summe der beiden kumulativen Einkommen ist konstant und damit von $\varepsilon \in (0,1]$ unabhängig.
- (2) Das Segment der hohen Einkommen $[T(\varepsilon); 1]$ akkumuliert (unabhängig von ε) das Einkommen $1/e$, wobei $T(\varepsilon) \rightarrow 1$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt.
- (3) Der Gleichstand für beide betrachteten Segmente mit dem Wert $1/2 \cdot (1 - 1/e)$ ergibt sich für $\varepsilon = \frac{\ln(0,5+1/2e)}{\ln 0,5} = 0,5481$.

Beweis zu (1):

Das kumulative Einkommen des unteren und des mittleren Segments beträgt

$$F_\varepsilon(T(\varepsilon)) = 1 - (1 - T(\varepsilon))^\varepsilon = 1 - \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)^\varepsilon = 1 - e^{-1} = 1 - 1/e$$

Beweis zu (2):

Nach (1) hat das hohe Segment das kumulative Einkommen $1 - (1 - 1/e) = 1/e$.

Beweis zu (3):

$$F_\varepsilon(0,5) = F_\varepsilon(T(\varepsilon)) - F_\varepsilon(0,5)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot F_\varepsilon(0,5) = F_\varepsilon(T(\varepsilon))$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \cdot 0,5^\varepsilon = 1 - 1/e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+1/e}{2} = 0,5^\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\ln(1/2+1/2e)}{\ln(1/2)}$$

Inkrementelle Bifurkation²⁰

Der Bifurkationspunkt im statischen Modell ergibt sich gemäß Definition in inkrementeller Interpretation als das Supremum aller Equityparameter ε , für die die Gleichung

$$F_{\varepsilon}(0,5) - F_{\varepsilon-\delta}(0,5) = F_{\varepsilon}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)) - F_{\varepsilon}(0,5) - (F_{\varepsilon-\delta}(\varepsilon, \varepsilon - \delta) - F_{\varepsilon-\delta}(0,5))$$

eine Lösung $\delta > 0$ hat. Die Gleichung bedeutet nämlich, dass die zusätzlichen Verluste in Segment $[0; 0,5]$ durch eine Equityabsenkung ε auf $\varepsilon - \delta$ denen im Segment $[0,5; T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)]$ entsprechen. Umformen der Gleichung liefert

$$\frac{2 \cdot (F_{\varepsilon}(0,5) - F_{\varepsilon-\delta}(0,5))}{\delta} = \frac{F_{\varepsilon}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)) - F_{\varepsilon-\delta}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta))}{\delta} \quad (F)$$

Eine Infinitesimalisierung der Gleichung (F), d.h. eine Durchführung des Grenzprozesses $\delta \rightarrow 0$ führt auf die Gleichung

$$\frac{2 \cdot \ln 2}{2^{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{e} \quad (G)$$

Gleichung (G) für den Bifurkationsparameter beinhaltet nur noch eine Variable. Diese wird mittels Intervallhalbierung numerisch bestimmt zu $\varepsilon_{bif_stat} = 0,3346$.

Im Einzelnen ergeben sich die Behauptungen wie folgt:

Für die rechte Seite von (F) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_{\varepsilon}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)) - F_{\varepsilon-\delta}(\varepsilon, \varepsilon - \delta)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - T(\varepsilon, \varepsilon - \delta))^{\varepsilon} - 1 + (1 - T(\varepsilon, \varepsilon - \delta))^{\varepsilon - \delta}}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln \varepsilon - \delta}{\varepsilon} \cdot (\varepsilon - \delta)} - e^{\frac{\ln \varepsilon - \delta}{\varepsilon} \cdot \varepsilon}}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\frac{\varepsilon \cdot \ln \varepsilon - \delta}{\varepsilon}} \cdot \frac{e^{\frac{\ln \varepsilon - \delta}{\varepsilon} \cdot \varepsilon} - 1}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\frac{\varepsilon \cdot \ln \varepsilon - \delta}{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon - \delta - 1}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\frac{\varepsilon \cdot \ln \varepsilon - \delta}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\varepsilon - \delta} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

²⁰ Auf diese Definition wird in [1], S. 265 Bezug genommen.

Die letzte Gleichung gilt wegen $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon}}{\delta} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\varepsilon - \delta}{\varepsilon}} \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{\varepsilon}$

Herleitung von (G) aus (F)

Für die linke Seite von (F) gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{F_\varepsilon(0,5) - F_{\varepsilon-\delta}(0,5)}{\delta} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{1 - 0,5^\varepsilon - 1 + 0,5^{\varepsilon-\delta}}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{0,5^{\varepsilon-\delta} - 0,5^\varepsilon}{\delta} = 2 \cdot 0,5^\varepsilon \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{0,5^{-\delta} - 1}{\delta} \\ &\stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} 2 \cdot 0,5^\varepsilon \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} 0,5^{-\delta} \cdot (-\ln 0,5) = \frac{2 \cdot \ln 2}{2^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Im Weiteren betrachten wir die Veränderung der Werte $f_\varepsilon(0,5)$ und $f_\varepsilon(T(\varepsilon)) - f_\varepsilon(0,5)$.

Lemma 10²¹

Die Differenz der Veränderungen verhält sich monoton wachsend. Als lokalen Bifurkationspunkt ergibt sich der Wert 0,3346. Der Wert wird bestimmt durch eine geschickte numerische Vorgehensweise, und zwar wie folgt:

Betrachtet man als unteres Segment $[0; 0,5]$, als mittleres Segment $[0,5; T(\varepsilon)]$ und als oberes Segment $[T(\varepsilon); 1]$, so

- ist das kumulative Einkommen des oberen Segments $1/e$, und zwar für alle Equitypenparameter ε .
- haben unteres und mittleres Segment das Gleiche kumulative Einkommen für $\varepsilon = \frac{\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right)}{\ln(1/2)} = 0,5481$
- haben unteres und mittleres Segment die kumulativen Einkommen 0,2070 bzw. 0,4251 beim Bifurkationsparameter 0,3346.

²¹ Auf dieses Lemma wird in [1], S. 265 Bezug genommen.

Beweis:

Der Bifurkationsparameter ergibt sich durch Gleichsetzen der Inkrementalfunktionen

$$Diff_{unten}(\varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_{\varepsilon}(0,5) - F_{\varepsilon-\delta}(0,5)}{\delta} = \frac{d}{d\varepsilon} F_{\varepsilon}(0,5) = \frac{\ln 2}{2^{\varepsilon}} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} Diff_{oben}(\varepsilon) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_{\varepsilon}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)) - F_{\varepsilon-\delta}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta))}{\delta} - \frac{F_{\varepsilon}(0,5) - F_{\varepsilon-\delta}(0,5)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_{\varepsilon}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta)) - F_{\varepsilon-\delta}(T(\varepsilon, \varepsilon - \delta))}{\delta} - \frac{d}{d\varepsilon} F_{\varepsilon}(0,5) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{e} - \frac{\ln 2}{2^{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Während die untere Inkrementalfunktion mittels Ableitungen über Lorenzkurven geschrieben werden kann, enthält die obere Inkrementalfunktion ein weiteres Differential. Die Situation ist insgesamt in Abb. 18 dargestellt.

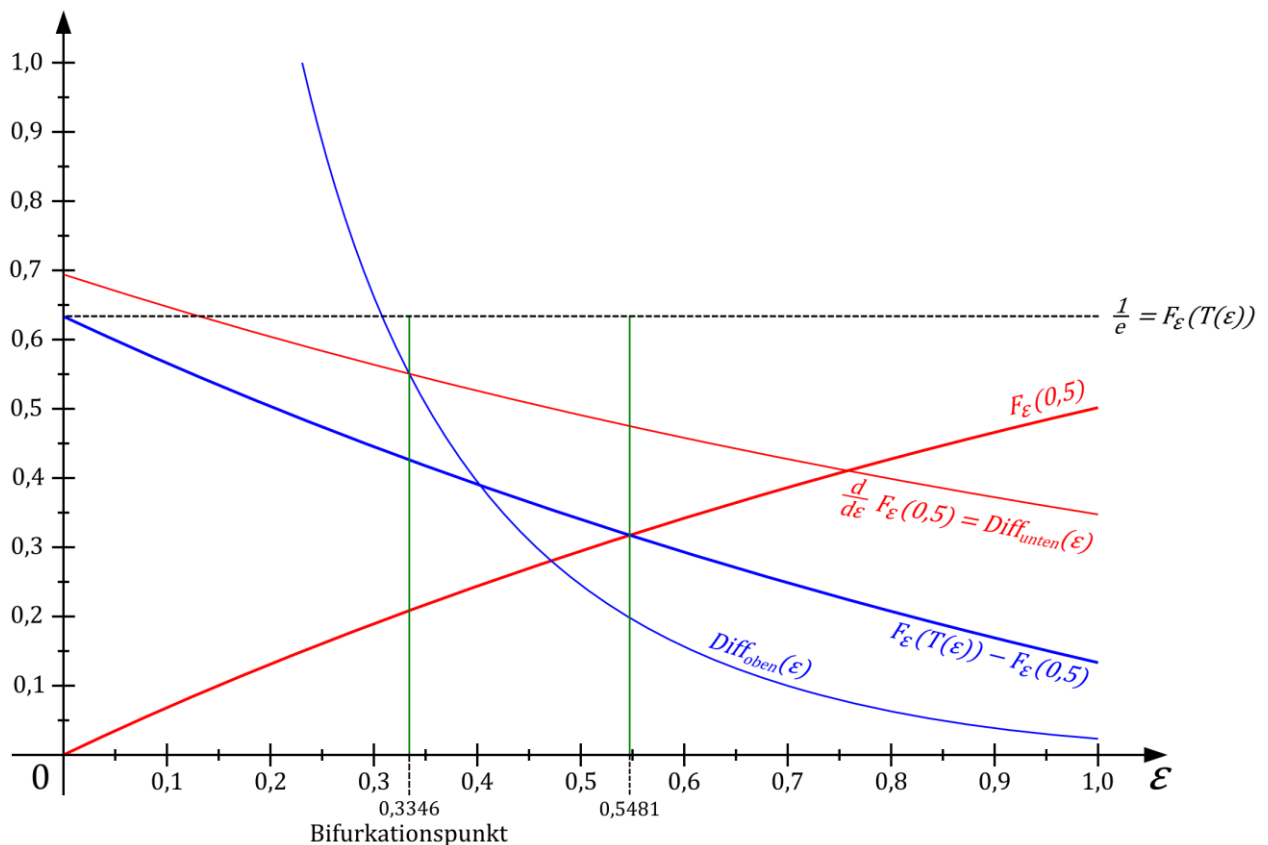


Abb. 18: Kumulatives Einkommen des unteren Segments (rot, fett) und kumulatives Einkommen des mittleren Segments (blau, fett) mit Gleichheit bis 0,5481. Inkrementalfunktion des unteren Segments (rot, dünn) und Inkrementalfunktion des mittleren Segments (blau, dünn) mit Gleichheit am Bifurkationspunkt $\varepsilon_{bif_stat} = 0,3346$.

Generelle Bifurkation / Partitionsfunktion für den statischen Fall

Die Einbettung der beschriebenen inkrementellen Bifurkation in die generelle Bifurkationsfunktion erfolgt wie nachfolgend angegeben:

Definition Partitionsfunktion

Die Partitionsfunktion gibt an, ab welcher Absenkung, von einem beliebigen Equityparameter ausgehend, die optimale Koalition gespalten ist. Dazu ist für jeden Ausgangsequityparameter ε_1 derjenige Parameter ε_2 zu bestimmen, für den die kumulativen Verluste der Einkommenssegmente $[0; 0,5]$ und $[0,5; T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$ gleich sind. D.h. für $0 < \varepsilon_1 < 1$ ist $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ zu bestimmen mit

$$F_{\varepsilon_1}(0,5) - F_{\varepsilon_2}(0,5) = F_{\varepsilon_1}(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - F_{\varepsilon_1}(0,5) - (F_{\varepsilon_2}(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - F_{\varepsilon_2}(0,5)) \quad (A)$$

Sofern es kein solches ε_2 gibt, setzt Spaltung der optimalen Koalition schon bei infinitesimaler Absenkung vom Ausgangsparameter ein, so dass in diesem Fall die Partitionsfunktion den Wert $pf(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ hat. Mit der Abkürzung

$$TT(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2 \cdot F_{\varepsilon_1}(0,5) - F_{\varepsilon_1}(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) - (2 \cdot F_{\varepsilon_2}(0,5) - F_{\varepsilon_2}(T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)))$$

ist die Gleichung (A) äquivalent zur Nullstellenbedingung $TT(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$. Damit hat die Partitionsfunktion die Darstellung

$$pf(\varepsilon_1) = \begin{cases} \varepsilon_2, & \text{falls ein } \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \text{ mit } TT(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0 \text{ existiert} \\ \varepsilon_1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Wert der Partitionsfunktion kann durch fortgesetzte Intervallhalbierung (sukzessive Bisektion) bestimmt werden. Dabei wird das Ausgangsintervall zwischen ε_1 und einem sehr kleinen Startwert sukzessive halbiert, wobei jeweils nach dem Halbintervall mit verschiedenen Vorzeichen der Funktion $TT(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ an den Randpunkten gesucht wird. **Die dabei zu lösenden numerischen Probleme sind aber erheblich.** Das heißt die Parameterbestimmung ist schwierig. Dies wird nachfolgend verdeutlicht.

Es treten im numerischen Bereich zwei Schwierigkeiten auf. (1) ein solches Intervall braucht nicht zu existieren und (2) das Ergebnis der Intervallsuche kann stark (und sogar unkontrollierbar) vom Startwert abhängen. Beide Schwierigkeiten werden von einem einzigen Verfahren bewältigt.

Zunächst ist festzustellen, dass die Funktion TT in ihrer ursprünglichen Form **nicht erfolgreich in numerischen Berechnungen** verwendet werden kann. Z.B. ergibt sich dabei für den Startwert $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ der folgende Verlauf der Partitionsfunktion

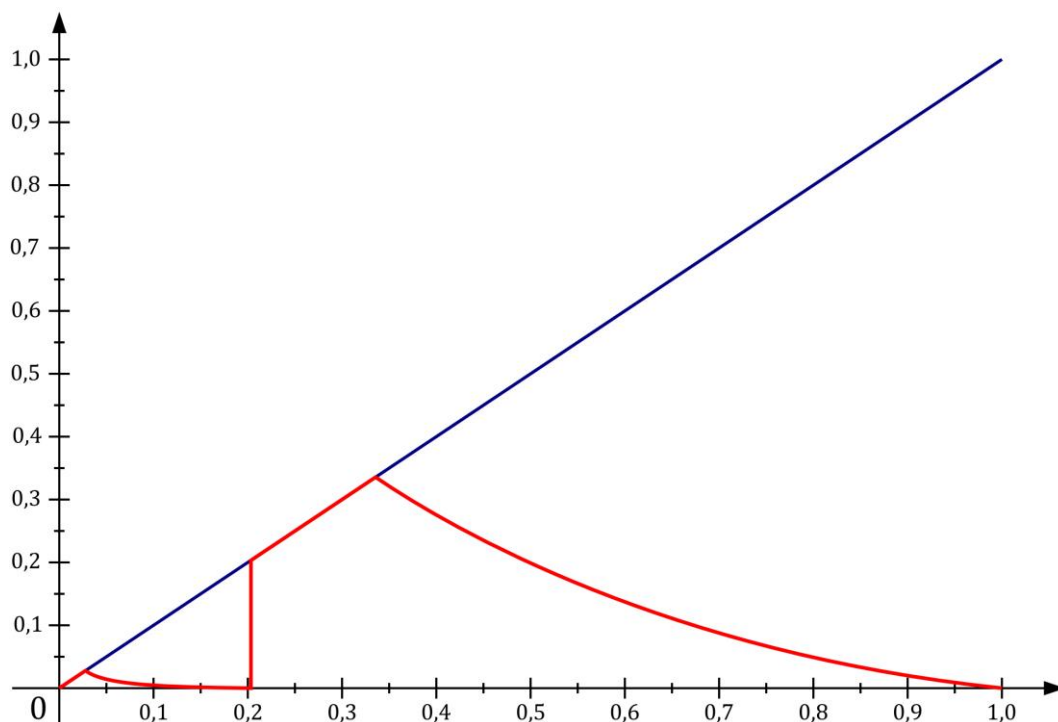


Abb. 19: Partitionsfunktion TT

Dieser Funktionsverlauf könnte zum Fehlschluss führen, dass ein kompliziertes Bifurkationsverhalten vorliegt. Bei Verwendung der Startwerte $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ und $\varepsilon_2 = 10^{-12}$ ergeben sich (von links nach rechts) je spezifische Funktionsverläufe, die ähnlich verwirrend sind.

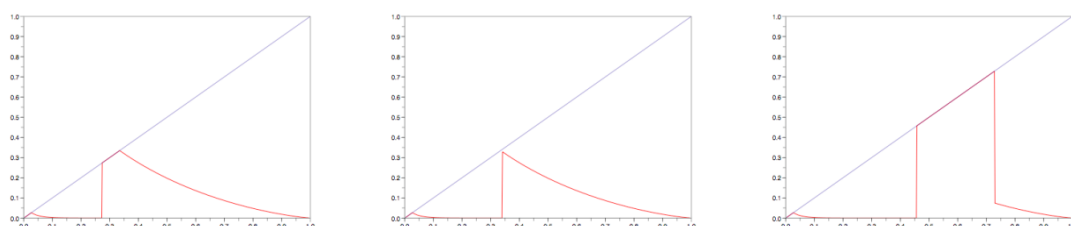


Abb. 20: Partitionsfunktion TT für verschiedene Startwerte

Die unterschiedlichen Funktionsverläufe (alle VIER sind falsch!) rühren daher, dass sich Exponenzierung und Logarithmieren zwar theoretisch aufheben, nicht aber numerisch in der Nähe von Null. Es wird daher die theoretisch äquivalente aber numerisch stabilere Funktion

$$TT(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = e^{\frac{\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 2 \cdot 0,5^{\varepsilon_1} + 2 \cdot 0,5^{\varepsilon_2}$$

verwendet. Damit ergibt sich für die vier vorangegangenen und für viele weitere Startwerte die nachfolgende Partitionsfunktion

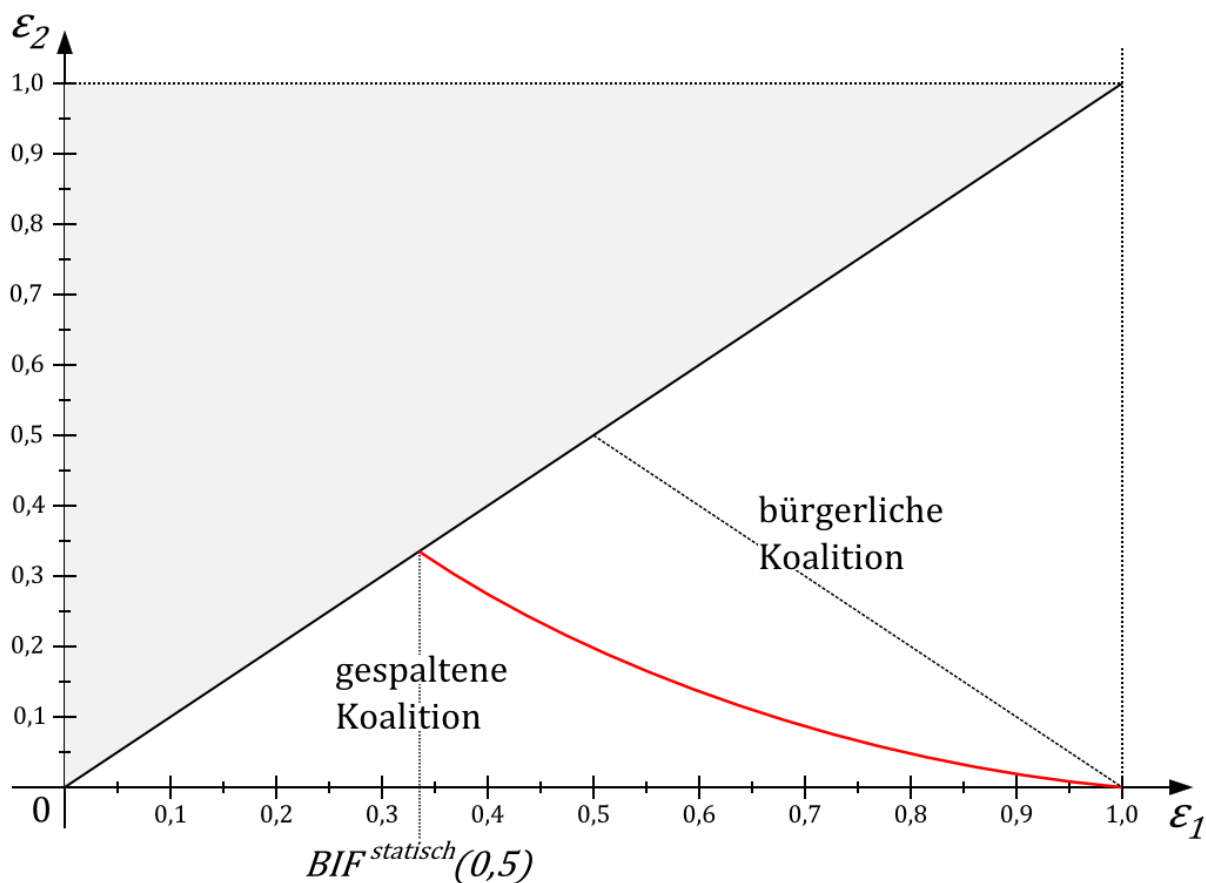


Abb. 21: Aufspaltung für $\beta = 0,5$ ²²

Die Kurve wurde numerisch ermittelt. Es ist dies die in [1] verwendete Funktion. Der maximale Wert ε_{bif} mit $pf(\varepsilon_{bif}) = \varepsilon_{bif}$ ist erneut der Bifurkationswert bei ca. 0,3346.

²² In Anlehnung an KÄMPKE [2].

Es gilt also, wie zu erwarten, dass der über die Partitionsfunktion wie der über die inkrementelle Bifurkationsberechnung gefundene Bifurkationspunkt identisch sind.

Berechnungsprogramm:

Die obigen Berechnungen und Abbildungen wurden mit dem nun ausschnittsweise wiedergegebenen Scilabprogramm durchgeführt bzw. erzeugt. Dabei ist die Notation gegenüber dem Text leicht (aber sinnfälliger) anders.

...

```
function w = x_be(epsilon_0,eps)
w = 1 - (%e)^(log(eps/epsilon_0)/(epsilon_0 - eps));
endfunction
```

```
function w = TT_naiv(eps,epsilon_0)
w = 2*F(0.5,epsilon_0) - F(x_be(epsilon_0,eps),epsilon_0) - (2 * F(0.5,eps) - F(x_be(epsilon_0,eps),eps));
endfunction
```

```
function w = TT(eps,epsilon_0)
w = (%e)^(log(epsilon_0/eps) / (eps - epsilon_0) * epsilon_0 ) * (eps - epsilon_0)/eps - 2 * .5^epsilon_0 + 2 * .5^eps;
endfunction
```

```
function w = direct_eps_1(epsilon_0)
eps_l = 10^(-4); // alternativ 10^(-5), 10^(-6) und 10^(-12)
eps_u = epsilon_0;
delta = 10^(-12);
while eps_u - eps_l > delta do
eps_m = 0.5 * (eps_l + eps_u);
//if sign( TT_naiv(eps_l,epsilon_0)) == sign( TT_naiv(eps_m,epsilon_0)) then eps_l = eps_m; else eps_u = eps_m; end
if sign( TT(eps_l,epsilon_0)) == sign( TT(eps_m,epsilon_0)) then eps_l = eps_m; else eps_u = eps_m; end
end // end "while eps_.."
w = 0.5 * (eps_l + eps_u);
endfunction
```

...

In Abb. 22 werden die Partitionsfunktion für das statische Modell und Stimmstärkefunktionen für verschiedene Niveaus gegenübergestellt. Für kleines β ist ein Schnittpunkt der Kurven J_β mit der Partitionsfunktion pf möglich. Das zeigt die folgende Abbildung:

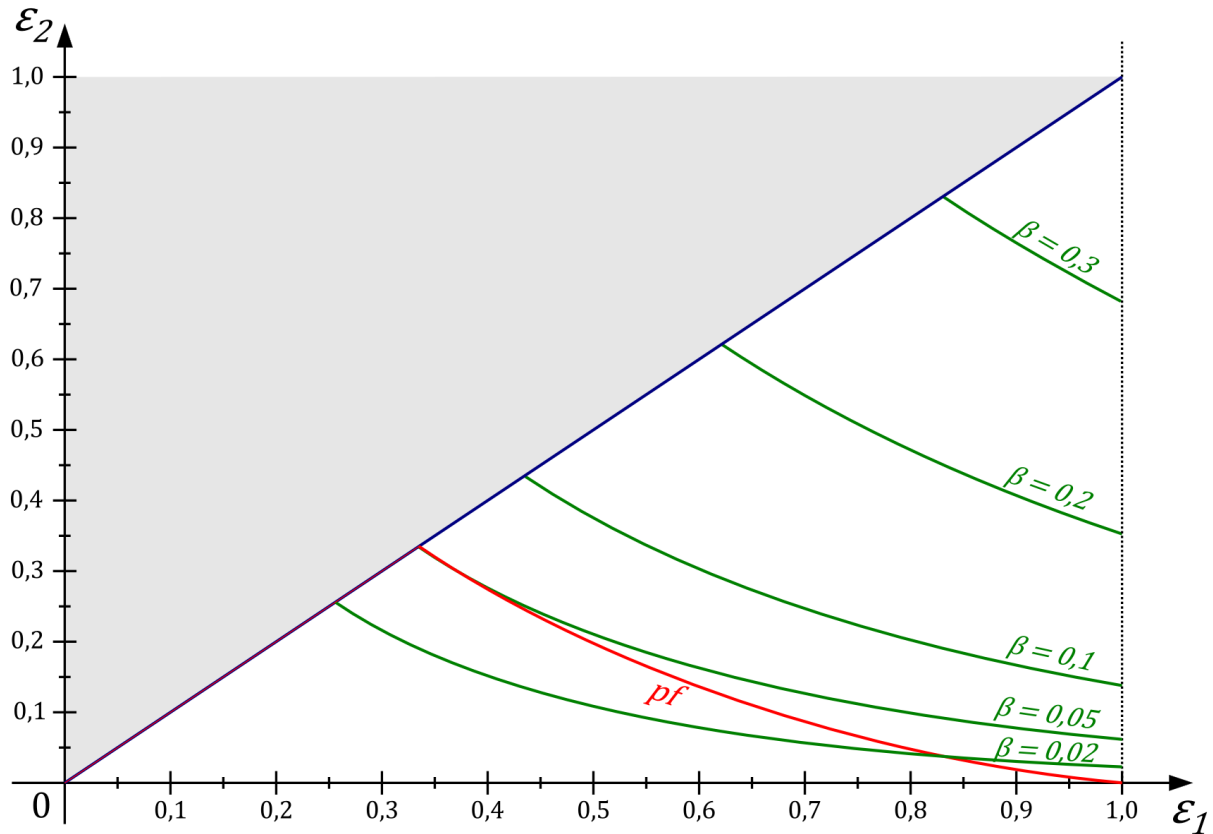


Abb. 22: Partitionsfunktion $BIF^{statisch}(0,5)$ und Stimmstärkefunktionen für die Niveaus $\beta=0,02, 0,05, 0,10, 0,20$ und $0,30$.

BIFURKATION im opportunistischen Modell

Im Weiteren wird der inkrementelle Bifunktionspunkt im opportunistischen Fall für $0 < \beta < 1$ betrachtet.

Es geht also im Weiteren um die Aufspaltung der bürgerlichen Koalition, bestehend aus $[0,5; T(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$ und $[T(\varepsilon_1, \varepsilon_2); 1]$, die sich in der Folge einer inkrementellen Absenkung des Ausgleichsniveaus als nicht mehr vorteilhaft erweist. Wie für den statischen Fall beschrieben, stellt sich die Frage nach dem Wechsel von bürgerlicher zur gespaltenen Koalition, wenn die hohen Einkommen nicht allein schon die Mehrheit haben. Für $0 \leq \beta \leq 0,368$ betrifft das nur die Fälle mit $\varepsilon \leq \frac{-1}{\ln(\beta)}$.

Inkrementelle Bifurkation

Zunächst geht es gemäß dem in [1] gewählten Ansatz um die Frage, wann sich die sich bildende Koalition einer geforderten Stimmstärke $\beta \in (0,1)$ bei inkrementeller Absenkung des Ausgleichsniveaus von ε auf $\varepsilon - \delta$, δ beliebig klein, spaltet, also nicht mehr in der bürgerlichen Koalition besteht. Die inkrementelle Bifurkation kann, wie unten beschrieben, auch wieder als Grenzfall der generellen Bifurkation und der zugehörigen Partitionsfunktion, die KÄMPKE ausführlich für das opportunistische Modell untersucht hat²³, interpretiert werden.

Die Definition des inkrementellen Bifurkationspunktes erfolgt unter Verwendung der in Kapitel 8.5 in [1] definierten Funktion X_{ISO} .

Definition

Der **inkrementelle Bifurkationspunkt** $BIF(\beta)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} BIF(\beta) &:= \inf \{ 0 < \varepsilon \leq 0,5 \mid x_{ISO}^\delta(\delta) \leq 1 - \beta \text{ für } \delta \geq 0 \text{ genügend klein} \} \\ &= \inf \{ 0 < \varepsilon < 0,5 \mid x_{ISO}(\varepsilon) \leq 1 - \beta \} \\ &= X_{ISO}^{-1}(1 - \beta) \end{aligned}$$

Der lokale Bifurkationspunkt ist wohldefiniert.

Die Bifurkationspunkte sind wiederum nur numerisch bestimmbar. Für $\beta = 0,5$ liegt er bei $\varepsilon = 0,454$.²⁴

²³ Vgl. KÄMPKE [2].

²⁴ Vgl. KÄMPKE [2].

Generelle Bifurkation und Partitionsfunktionen

KÄMPKE bettet die Bestimmung des Bifurkationspunktes erneut in die Analyse der allgemeinen Bifurkation ein. Wie im statischen Fall betrachtet er hierzu wieder die entsprechende Partitionsfunktion:

Zur Analyse des allgemeinen Bifurkationsverhaltens geht es um die Frage, wann auch bei großen Absenkungen des Ausgleichsniveaus eine Spaltung der bürgerlichen Koalition auftritt. In diesem Fall sind ebenfalls Equity-Parameter $\varepsilon \geq 0,5$ zu betrachten, während inkrementelle Bifurkationsphänomene nur für Equity-Parameter $\varepsilon \leq 0,5$ auftreten.

Wie in Satz 3 gezeigt, ist es eine notwendige, jedoch nicht hinreichende Voraussetzung für eine Bifurkation, dass die Verlustfunktion *VERL* ein lokales Maximum hat. Für $0,5 \geq \varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ist das immer der Fall. Für $\varepsilon_1 > 0,5$ gilt dies hingegen nur, falls $\varepsilon_2 < 1 - \varepsilon_1$, da nur so $\varepsilon_1(\varepsilon_1 - 1) > \varepsilon_2(\varepsilon_2 - 1)$ gesichert werden kann (vgl. insgesamt Satz 3 (4)). Aufspaltungen finden also potenziell für $\varepsilon_2 < 1 - \varepsilon_1$ statt, abhängig von der jeweilig geforderten Stimmstärke β .

In einer systematischen Untersuchung geht KÄMPKE über die Betrachtung der analog zum statischen Fall definierten Partitionsfunktion wie folgt vor, um das Phänomen der Aufspaltung für verschiedene $\beta \in (0,1)$ zu analysieren.

Definition: Partitionsfunktion im statischen Fall

Für jede Stimmstärke $\beta \in (0,1)$ und für jedes Paar $1 \geq \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ wird eine **Partitionsfunktion** $H_\beta(\varepsilon_1)$ definiert, die dadurch gegeben ist, dass sie für jedes ε_1 dasjenige ε_2 bestimmt, für das bei einer Absenkung von ε_1 auf ε_2 letztmalig keine Aufspaltung auftritt, also:

$$H_\beta(\varepsilon_1) = \varepsilon_2^0 = \inf_{\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1} X_{ISO}^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(\varepsilon_1) \geq 1 - \beta = (X_{ISO}^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2})^{-1}(1 - \beta)$$

Hinweis:

$H_\beta(\varepsilon_1)$ ist implizit definiert. Es gilt: $H_\beta(\varepsilon_1) < 1 - \varepsilon_1$ für alle $\beta \in (0,1)$. Der Verlauf der Funktion $H_\beta(\varepsilon_1)$ gestaltet sich prinzipiell wie folgt:

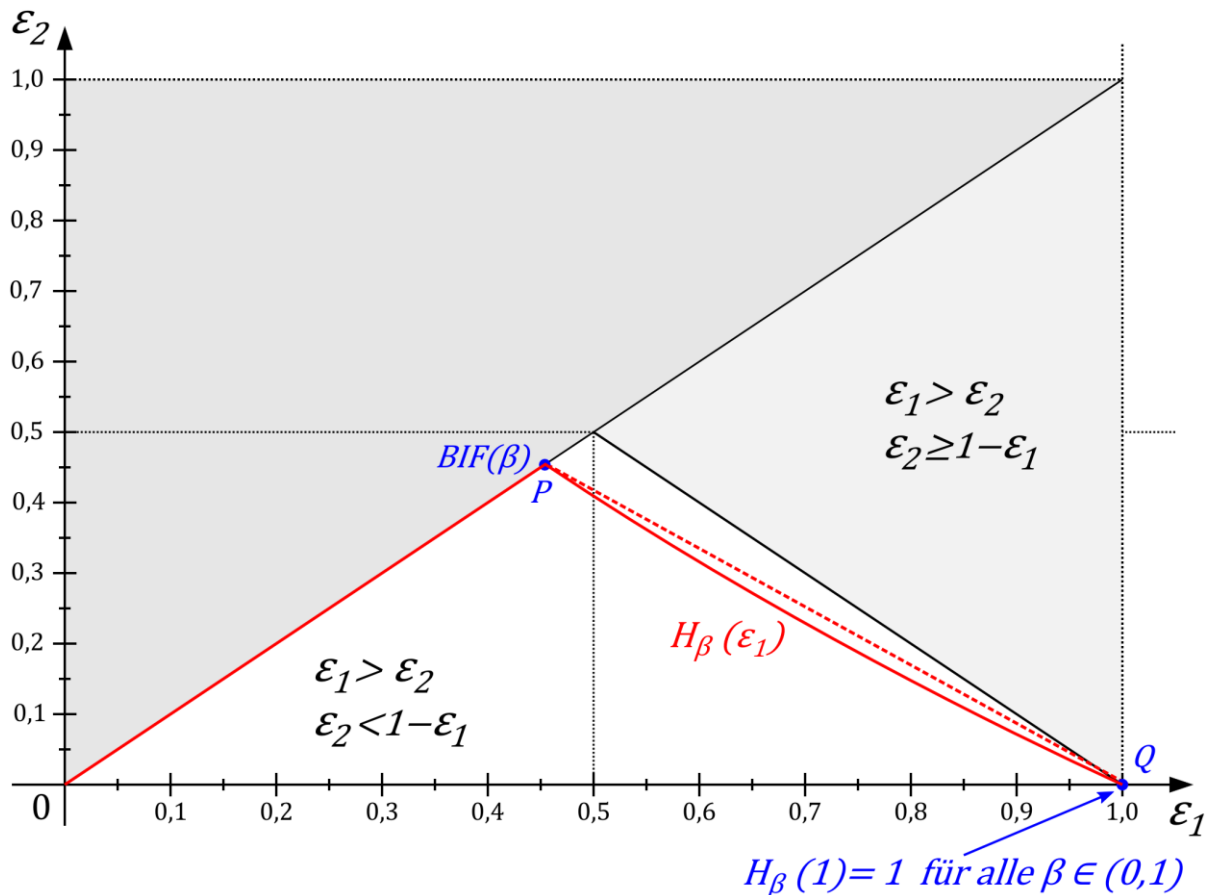


Abb. 23: Prinzipieller Verlauf der Funktion $H_\beta(\varepsilon_1)$ ²⁵

Die Eindeutigkeit des Punktes $H_\beta(\varepsilon_1)$ für festes β und festes ε_1 ist gegeben und ist Voraussetzung für seine implizite Definition. Der Punkt existiert für alle $\varepsilon_1 \geq BIF(\beta)$. Für jedes $\varepsilon_1 > BIF(\beta)$ ist noch eine Absenkung um ein kleines δ möglich, ohne dass eine Aufspaltung auftritt. Für den eindeutigen Limespunkt $(BIF(\beta), BIF(\beta))$ gilt das nicht mehr, für kleinere ε_1 als $BIF(\beta)$ ohnehin nicht.

Der von KÄMPKE gewählte Ansatz ist äquivalent zu der oben gegebenen Definition der inkrementellen Bifurkation.

²⁵ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 286 Bezug genommen.

Aufgrund der numerischen Berechnung durch KÄMPKE wird deutlich, dass die Funktionen $H_\beta(\varepsilon_1)$ offenbar konvex sind, auch wenn ein analytischer Beweis dieser Eigenschaft noch aussteht. Die Funktionen $H_\beta(\varepsilon_1)$ verlaufen damit im Intervall $[BIF(\beta), 1]$ unterhalb der in der vorherigen Abbildung punktiert eingezeichneten Strecke, die die Punkte P und Q miteinander verbindet.

Mit $BIF(0,5) = 0,454$ ist bereits ein Bifunktionspunkt bekannt. Alle $H_\beta(\varepsilon_1)$ für $1 > \beta \geq 0,5$ liegen aus Monotoniegründen dicht gedrängt in einem schmalen Korridor zwischen der Strecke zwischen $P_{0,5}$ und Q sowie der Strecke zwischen $(0,5; 0,5)$ und $(1,0)$. Die folgende Abbildung zeigt die Verläufe der Funktion $H_\beta(\varepsilon_1)$ für $\beta = 0,3$, $\beta = 0,5$, $\beta = 0,7$ und $\beta = 0,9$. Hinweise zu dem numerischen Problem bei der Berechnung finden sich in [2]. Zurückgegriffen wird dazu auf den unten beschriebenen Zusammenhang. (*)

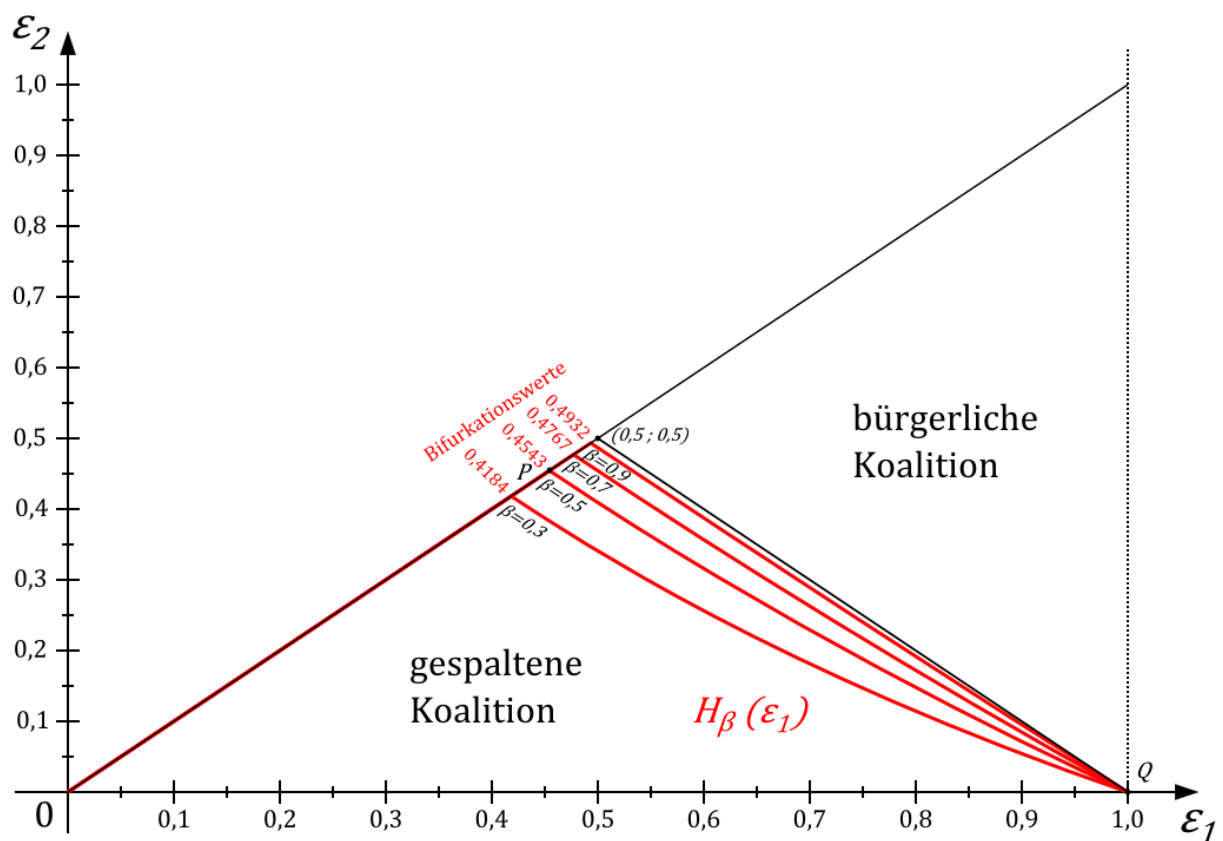


Abb. 24: Verlauf mehrerer Funktionen $H_\beta(\varepsilon_1)$ ²⁶

²⁶ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 287 Bezug genommen.

Für die Bifurkationspunkte ergeben sich die folgenden Werte: $BIF(0,3) = 0,4184$, $BIF(0,5) = 0,4543$, $BIF(0,7) = 0,4767$ und $BIF(0,9) = 0,4932$.

Die tatsächliche Berechnung leistet KÄMPKE über einen weiteren Zusammenhang. (*)

Die Bestimmung des Bifurkationspunktes im opportunistischen Modell für $\beta = 0,5$ erfolgt durch die Ermittlung des Maximums der sog. Median-Minimum-Funktion $\varphi(\varepsilon) = f_\varepsilon(0,5) - f_\varepsilon(0)$. Für andere Niveaus β wird entsprechend das Maximum der Funktion $f_\varepsilon(1 - \beta) - f_\varepsilon(0)$ bestimmt.

KÄMPKE betrachtet also die Differenz zwischen $f_x(\varepsilon)$ und dem Equity-Parameter ε . Es geht also um die Funktion $D_x(\varepsilon) = f_x(\varepsilon) - \varepsilon$.

Offenbar ist $D_x(\varepsilon)$ für hohe und niedrige Equity-Parameter tendenziell klein und für mittlere Equity-Parameter groß. Man überlegt sich, dass $D^*(x) = \max_{\varepsilon \in (0,1)} f_x(\varepsilon) - \varepsilon$ existiert und gerade der Bifurkationspunkt für eine geforderte Stimmstärke $x = 1 - \beta$ ist, dass also $BIF(\beta) = D_{1-\beta}(\varepsilon) = f_{1-\beta}(\varepsilon) - \varepsilon$ gilt.

Dies ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 11²⁷

Mit den gegebenen Bezeichnungen gilt

$$\varepsilon_0 := BIF(\beta) = D^*(1 - \beta) := \varepsilon_1$$

(1) Sei als Annahme $BIF(\beta) < D^*(\beta)$

Dann ist $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, d.h. von ε_1 aus kann die Equity um ein genügend kleines $\delta > 0$ auf $\varepsilon = \varepsilon_1 - \delta > \varepsilon_0$ weiter abgesenkt werden, ohne dass Bifurkation auftritt. Das bedeutet äquivalent

$$\begin{aligned} VERL_{\varepsilon_1, \varepsilon}(1 - \beta) &= f_{\varepsilon_1}(1 - \beta) - f_\varepsilon(1 - \beta) < \varepsilon_1 - \varepsilon \\ \Leftrightarrow D(\varepsilon_1) &= f_{\varepsilon_1}(1 - \beta) - \varepsilon_1 < f_\varepsilon(1 - \beta) - \varepsilon =: D(\varepsilon), \end{aligned}$$

in Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von ε_1 für D^* .

(2) Sei als Annahme $BIF(\beta) > D^*(\beta)$

In diesem Fall beinhaltet die Absenkung der Equity von ε_0 auf ε_1 eine Aufspaltung, es ist also $VERL_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}(1 - \beta) > \varepsilon_0 - \varepsilon_1$. Das bedeutet äquivalent

²⁷ Dieser Satz beweist die Aussage zum Thema auf S. 287 in [1].

$$f_{\varepsilon_0}(1 - \beta) - f_{\varepsilon_1}(1 - \beta) > \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \Leftrightarrow f_{\varepsilon_0}(1 - \beta) - \varepsilon_0 < f_{\varepsilon_1}(1 - \beta) - \varepsilon_1 \\ \Leftrightarrow D(\varepsilon_0) < D(\varepsilon_1)$$

im Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von ε_0 für D^* .

Im Weiteren wird in Form des **Bifurkationskurvensatz** formuliert, dass es für jedes $\beta \in (0,1)$ einen Bifurkationspunkt gibt und dass dabei alle ε mit $0 < \varepsilon < 0,5$ als Bifurkationspunkt auftreten können. Dies hebt erneut die kritische Rolle der Grenze $\varepsilon = 0,5$ hervor. Unterhalb dieser Grenze sind Aufspaltungen der bürgerlichen Koalition bei einer inkrementellen Absenkung des Ausgleichsniveaus immer möglich. Bezeichnet $BIF(\beta)$ den zu einer erforderlichen Stimmstärke $\beta \in (0,1)$ gehörenden Equity-Parameter, an dem die Bifurkation bei inkrementeller Absenkung geschieht, dann gilt der folgende Satz:

Satz 12 (Bifurkationskurvensatz)²⁸

Im opportunistischen Modell gilt:

1. BIF ist gegeben durch die Funktion $X_{ISO}^{-1}(1 - x)$, $x \in (0,1)$.
2. Für $\beta \rightarrow 1$ konvergiert $BIF(\beta) \rightarrow 0,5$ und für $\beta \rightarrow 0$ konvergiert $BIF(\beta) \rightarrow 0$.
3. BIF ist stetig, streng monoton wachsend und konkav.

Beweis:

(1) folgt direkt aus der Definition der inkrementellen Bifurkation. Das Limesverhalten in (2) für $\beta = 1$ folgt aus Satz 3 für $\beta \rightarrow 1$ und damit $1 - \beta \rightarrow 0$. Schließlich sind die Stetigkeit und Monotonie von BIF Folge der Definition als Zusammensetzung stetiger bzw. monotoner Funktionen oder deren Umkehrung, wobei (3) bisher „nur“ aufgrund numerischer Kurvenberechnung vorliegt.

²⁸ Vgl. Satz 8.13 (Bifurkationssatz) in [1]

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Verlauf der Kurve $BIF = X_{ISO}^{-1}(1 - x)$ und verdeutlicht den Zusammenhang zwischen der erforderlichen Stimmstärke sowie dem resultierenden Equity-Parameter, für den das Grenzbifurkationsphänomen erstmalig (in einer absteigenden Betrachtung) auftaucht. Der Kurvenverlauf wurde mit numerischen Methoden bestimmt.

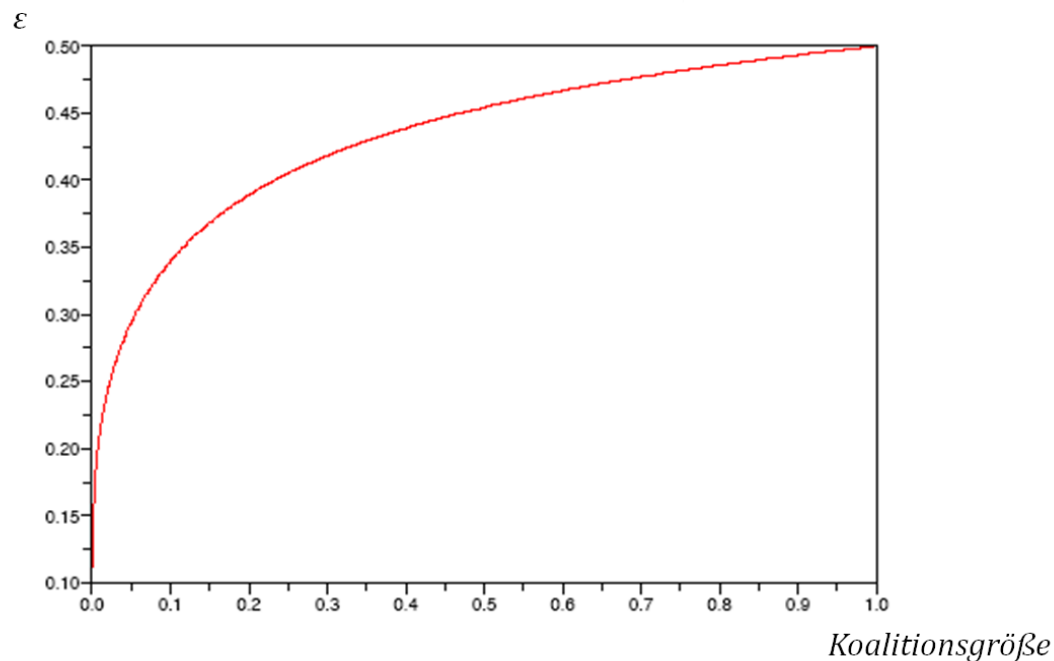


Abb. 25: Grenzbifurkation in Abhängigkeit von der Koalitionsgröße²⁹

Seitenzahlungen

Es wird in einem erweiterten Kontext der Frage nachgegangen, inwieweit das gewinnende Segment durch Sondertransfers eine Mehrheitsbildung für bestimmte ε destabilisieren kann. Dies betrifft u.a. **Seitenzahlungen**.

Vorüberlegung

Es war oben schon diskutiert worden, dass hohe Ungleichheit dem reichen Segment die Möglichkeit eröffnet, auf vielfältige personennahe Dienstleistung preiswert zuzu-

²⁹ Auf diese Abbildung wird in [1], S. 290 Bezug genommen.

greifen – dort als ein „Charme“ der Ungleichheit bezeichnet. Des Weiteren hatten sich oben optimale Equities für bestimmte „Mittelstandssegmente“ ergeben.

Satz 13

Wenn 20% (bzw. 15% bzw. 10%) des kumulativen Einkommens der 20% Reichsten der Bevölkerung dazu eingesetzt werden, den korrespondierenden Teil der Schlecht-bezahltesten als personennahe Dienstleister zu bezahlen, d.h. das gesamte Einkommen der $x \cdot 100\%$ Ärmsten der Bevölkerung so direkt zu finanzieren, so deckt dies einen Bevölkerungsanteil von

$$x = 1 - (1 - 0.2^{\varepsilon+1})^{1/\varepsilon}$$

ab.

Beweis:

Das kumulative Einkommen der 20% ($x = 0,8$) mit den höchsten Einkommen ist

$$1 - F_{\varepsilon}(x) = 1 - [1 - (0,2)^{\varepsilon}] = 0,2^{\varepsilon}. \text{ Davon 20\% sind } (0,2)^{\varepsilon+1}.$$

Das Einkommen der $x\%$ Ärmsten ist $F_{\varepsilon}(x) = 1 - (1 - x)^{\varepsilon}$.

$$1 - (1 - x)^{\varepsilon} = (0,2)^{\varepsilon+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - (0,2)^{\varepsilon+1} = (1 - x)^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow (1 - (0,2)^{\varepsilon+1})^{1/\varepsilon} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - (1 - (0,2)^{\varepsilon+1})^{1/\varepsilon}$$

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick:

ε	Finanzierter Bevölkerungsanteil personennaher Dienstleister		
	bei 10%	bei 15%	bei 20%
0.70	0.0460	0.0687	0.0913
0.65	0.0535	0.0799	0.1060
0.60	0.0626	0.0933	0.1237
0.55	0.0738	0.1097	0.1450
0.50	0.0874	0.1297	0.1709
0.45	0.1045	0.1544	0.2027
0.40	0.1262	0.1855	0.2423
0.35	0.1542	0.2251	0.2921
0.30	0.1913	0.2766	0.3553

Satz 14³⁰

Die mittlere Equity derjenigen, für die Ungleichheit Vorteile hat, d.h. für alle Einkommenspositionen $x > 1 - 1/e$, ist $\varepsilon = 0,5964$.

³⁰ Auf diesen Satz bezieht sich die Fußnote 224, S. 223 in [1].

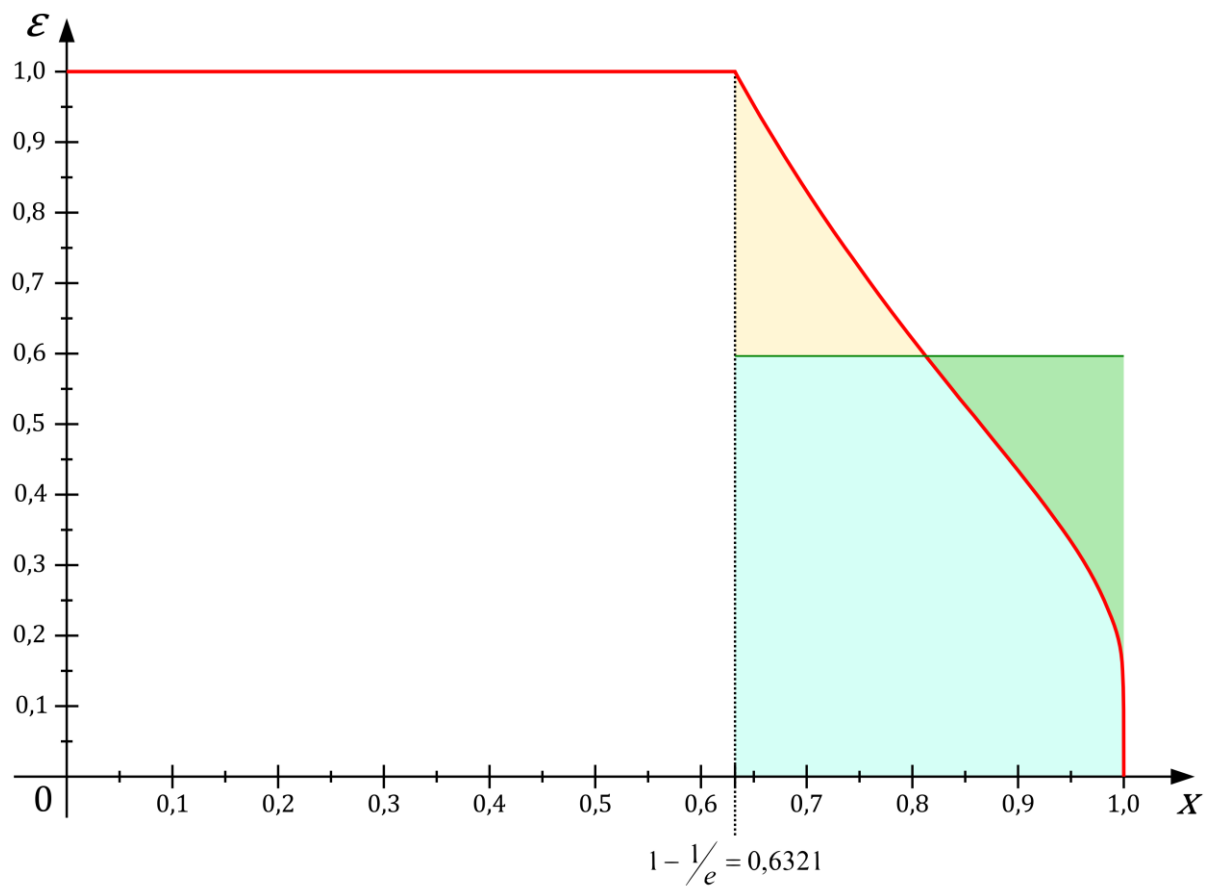


Abb. 26: Umkehrfunktion X_T^{-1}

Literaturverzeichnis

1. Herlyn, E.: Einkommensverteilungsbasierte Präferenz- und Koalitionsanalysen auf der Basis selbstähnlicher Equity-Lorenzkurven - Ein Beitrag zur Quantifizierung sozialer Nachhaltigkeit, Dissertation RWTH Aachen, eingereicht 2011
2. Kämpke, T. (2011): Income distributions and majority patterns, International Journal of Computational Economics and Econometrics, Bd. 2., erscheint 2011